Termumformungen

Arithmetische Terme umformen heisst oft, sie ausrechnen:
$((-3) + (-7)) : 2 \Rightarrow (-10) : 2 \Rightarrow -5$

Wenn algebraische Terme Variablen enthalten, kann man sie nicht einfach ausrechnen. Man kann sie aber in eine übersichtliche Form bringen, indem man die aus der Arithmetik bekannten Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze für Terme formuliert und benutzt:

$T_1 + T_2 = T_2 + T_1$	$T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$
$(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$	$(T_1 \cdot T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3)$
$T_1 \cdot (T_2 + T_3) = T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3$	$(T_1 + T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot T_3 + T_2 \cdot T_3$

Konventionen: Man bringt die Terme in eine Normalform, bei der es möglichst keine Klammern gibt. Produkte ordnet man so, dass alle Variablen alphabetisch sortiert sind und die Zahlfaktoren am Anfang stehen: Statt $c\cdot a\cdot 5\cdot b\cdot d\cdot 3\cdot c$ schreibt man somit $15\cdot a\cdot b\cdot c^2\cdot d$. Man lässt weiter die Multiplikationszeichen weg und schreibt nur $15abc^2d$. Die Zahlfaktoren heissen Koeffizienten. Den Koeffizienten 1 lässt man weg und schreibt statt 1a einfach a.

Welche Zahl man auch immer für a einsetzt, die Terme 2a+5a und 7a haben denselben Wert. Man nennt sie deshalb gleichwertig. Um einen Term in eine übersichtlichere Form zu bringen darf man ihn umformen, wenn er dabei gleichwertig bleibt. Solche Umformungen nennt man Termumformungen. Man schreibt $2a+5a \Rightarrow 7a$ dafür oder einfach $2a+5a = 7a$.

Man darf Klammern weglassen:
$5a + (3a + 2a) = 5a + 3a + 2a$
$5a - (3a - 2a) = 5a - 3a + 2a$
Man darf Terme in Summen und Produkten umordnen:
$5b + 3a - 4b + 2a = 3a + 2a + 5b - 4b$
$3ab + 5ba = 3ab + 5ab$
Das sind Anwendungen der Kommutativ- und Assoziativgesetze.

Man darf Terme mit gleichen Variablen zusammenfassen:
$2a + 5a = 7a$
$5b + 3a - 4b + 2a = 3a + 2a + 5b - 4b = 5a + b$
Man darf Terme ausmultiplizieren und ausklammern:
$2a + 5ab = (2 + 5b)\cdot a$
Das sind Anwendungen der Distributivgesetze.

Ausmultiplizieren und Ausklammern

Ausmultiplizieren kann man bei arithmetischen Termen brauchen:
$16 \cdot 7 = (10 + 6) \cdot 7 = 10 \cdot 7 + 6 \cdot 7 = 70 + 42 = 112$

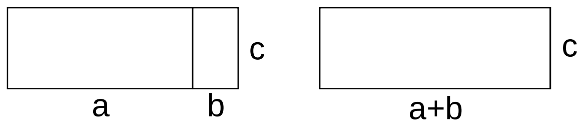
Ausmultiplizieren und Ausklammern sind Anwendungen der beiden Distributivgesetze:

$T_1 \cdot (T_2 + T_3) = T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3$
$(T_1 + T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot T_3 + T_2 \cdot T_3$

$\Rightarrow$
ausmultiplizieren

$\Leftarrow$
ausklammern

Geometrische Interpretation:

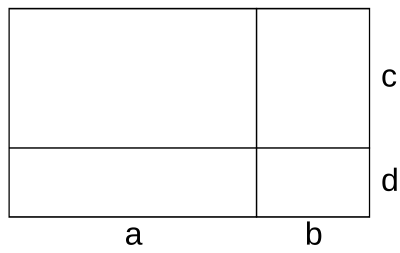


$a \cdot c + b \cdot c = (a+b) \cdot c$

Beispiele:
$2a \cdot (3a + 5b) = 2a \cdot 3a + 2a \cdot 5b = 6a^2 + 10ab$
mit $T_1 = 2a$, $T_2 = 3a$ und $T_3 = 5b$ in $T_1 \cdot (T_2 + T_3) = T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3$ oder
$(3a + 5b) \cdot 2a = 3a \cdot 2a + 5b \cdot 2a = 6a^2 + 10ab$
mit $T_1 = 3a$, $T_2 = 5b$ und $T_3 = 2a$ in $(T_1 + T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot T_3 + T_2 \cdot T_3$ oder
$(3a - 5b) \cdot 2a = (3a + (-5)b) \cdot 2a = 3a \cdot 2a + (-5)b \cdot 2a = 6a^2 - 10ab$

In zwei Schritten kann man auch $(a + b)(c + d)$ ausmultiplizieren:
1. Schritt:
$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$
2. Schritt:
$a(c + d) = ac + ad$ und
$b(c + d) = bc + bd$
Somit gilt:
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Geometrische Sicht:



In gleicher Weise multipliziert man $(a + b)(c + d + e)$ aus:
$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$

Beim Ausklammern sucht man nach gemeinsamen Faktoren:
In $24ab^2cd + 15a^3b^3c^2$ kommen die Faktoren 3, a, b^2 und c in beiden Summanden vor, sodass man $3ab^2c$ ausklammern kann:
$24ab^2cd + 15a^3b^3c^2 = 3ab^2c \cdot (8d + 5a^2bc)$
Ob dies stimmt, kann man durch Ausmultiplizieren nachprüfen.)

<u>Konvention:</u> Man ordnet Terme nach ihren Variablen alphabetisch und schreibt somit $-2x +5y +3z +6$ für $3z + 6 - 2x + 5y$.

Gleichungen und Ungleichungen

Definition: Eine Gleichung behauptet die Gleichheit von zwei Termen $T_1 = T_2$. Eine Ungleichung behauptet die Ungleichheit von zwei Termen. Die Lösung einer Gleichung oder Ungleichung ist die Menge aller Werte, die man für die vorkommenden Variablen einsetzen darf, sodass die Gleichung oder Ungleichung wahr ist.

Beispiele:
Die Gleichung $3x - 6 = 0$ hat nur die eine Lösung $x = 2$, während die Gleichung $x^2 = 4$ die zwei Lösungen $x = 2$ und $x = -2$ hat.
Die Ungleichung $3x - 6 \geq 0$ hat die Lösung $x \geq 2$, während die Ungleichung $x^2 \geq 0$ für jede Zahl x gilt.

Wenn $T_1 = T_2$ gilt, so gilt auch:
$T_1 + T = T_2 + T$ für jeden Term T,
$T_1 - T = T_2 - T$ für jeden Term T,
$T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$ für jeden Term T und
$T_1 : T = T_2 : T$ für jeden Term T mit $T \neq 0$.
Das nützt man aus, um die Lösungen einer Gleichung zu finden.

Beispiel:

$25x + 13 = 20x + 28$	$-20x$	Damit alle Terme mit x auf der linken Seite stehen.
$25x - 20x + 13 = 20x - 20x + 28$		
$5x + 13 = 28$	-13	Damit alle Zahlterme auf der rechten Seite stehen.
$5x + 13 - 13 = 28 - 13$		
$5x = 15$	$:5$	Damit x ohne Koeffizient ist.
$5x : 5 = 15 : 5$		
$x = 3$		Lösungsmenge $L = \{3\}$

Wenn $T_1 \geq T_2$, $T_1 > T_2$, $T_1 \leq T_2$, $T_1 < T_2$ oder $T_1 \neq T_2$ gilt, so darf man auf beiden Seiten denselben Term hinzu- oder wegzählen, ohne dass die behauptete Ungleichung sich dadurch ändert. Gilt beispielsweise die Ungleichung $T_1 \geq T_2$, so gilt auch
$T_1 + T \geq T_2 + T$ für jeden Term T und
$T_1 - T \geq T_2 - T$ für jeden Term T.
Multiplikation und Division sind problematischer. Mit $T_1 \geq T_2$ gilt nur
$T_1 \cdot T \geq T_2 \cdot T$ für Terme T mit $T > 0$ und
$T_1 : T \geq T_2 : T$ für Terme T mit $T > 0$.