Operationen auf Zahlen

Es gibt folgende Operationen auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

- Addition: $2 + 3 = 5$
- Subtraktion: $9 - 6 = 3$
- Multiplikation: $2 \cdot 3 = 6$
- Division: $8 : 4 = 2$

Operationen kann man zusammensetzen. Addiert man erst 5 und 6, multipliziert das Resultat mit 7 und subtrahiert vom Ergebnis noch 8, so schreibt man: $((5 + 6) \cdot 7) - 8$

Konvention: Multiplikation und Division binden stärker als Addition und Subtraktion (”Punkt vor Strich”).

Beispiel: Statt $(2 \cdot 3) + 4$ schreiben wir $2 \cdot 3 + 4$. Soll erst die Addition ausgeführt werden, müssen wir $2 \cdot (3 + 4)$ mit Klammern schreiben.

Satz: Für die Addition gelten folgende Gesetze:

- Kommutativgesetz: $a + b = b + a$
- Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Satz: Für die Multiplikation gelten folgende Gesetze:

- Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Beispiel: Die Multiplikation $4 \cdot (13 \cdot (25 \cdot 3))$ darf zu $(4 \cdot 25) \cdot (13 \cdot 3)$ umgeformt werden, was bedeutend einfacher zu rechnen ist.

Satz: Für Addition und Multiplikation gelten folgende Gesetze:

- Linkes Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Rechtes Distributivgesetz: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Beispiel: $3 \cdot 13 = 3 \cdot (10 + 3) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 3 = 30 + 9 = 39$.

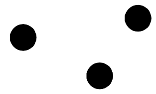
Definition: Wenn eine natürliche Zahl a n-mal mit sich selber multipliziert wird, schreiben wir a^n und nennen dies die n-te Potenz von a.

Beispiel: Für $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ schreiben wir 3^5.

Satz: Es gilt $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Zahlen, ihre Namen und ihre Darstellung

Wenn man von einer Zahl spricht, kann man Verschiedenes meinen:

1. eine Anzahl Dinge 
2. den Namen einer Zahl — Drei
3. die mit Ziffern dargestellte Zahl — 3

Zahlen

Man kann immer noch ein Ding dazulegen:

Die Zahlengerade:

Zahlennamen

Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun, Zehn,
Elf, Zwölf → Dreizehn, Vierzehn, Fünfzehn, ...
Zwanzig, Einundzwanzig, Zweiundzwanzig, Dreiundzwanzig, ...
Dreissig, Einunddreissig, ...
Vierzig, ...
...
Hundert, ...
Tausend, ...

Zahlendarstellungen

1. Additionssysteme: römische Zahlen, ...
2. Stellenwertsysteme: Dezimalsystem, Binärsystem, Oktalsystem, ...

Potenzen:
Zahlen wie 10’000’000’000’000 werden sehr lang, also schreibt man:

$$10'000'000'000'000 = 10^{13}$$

Zahlennamen von grossen Zahlen

1	10^{0}	Eins
10	10^{1}	Zehn
100	10^{2}	Hundert
1000	10^{3}	Tausend
1’000’000	10^{6}	Million
1’000’000’000	10^{9}	Milliarde
1’000’000’000’000	10^{12}	Billion
1’000’000’000’000’000	10^{15}	Billiarde
1’000’000’000’000’000’000	10^{18}	Trillion
1’000’000’000’000’000’000’000	10^{21}	Trilliarde
1’000’000’000’000’000’000’000’000	10^{24}	Quadrillion
1’000’000’000’000’000’000’000’000’000	10^{27}	Quadrilliarde
1’000’000’000’000’000’000’000’000’000’000	10^{30}	Quintillion
...	10^{33}	Quintilliarde
	10^{36}	Sextillion
	10^{39}	Sextilliarde
	10^{42}	Septillion
	10^{45}	Septilliarde
	10^{48}	Oktillion
	10^{51}	Oktilliarde
	10^{54}	Nonillion
	10^{57}	Nonilliarde
	10^{60}	Dezillion
	10^{63}	Dezilliarde

Undezillion, Undezilliarde, Duodezillion, Duodezilliarde, Tredezillion, ...
...
Viginti-, Unviginti-, Duoviginti-, Treviginti-, ...
Triginti-, Untriginti-, Duotriginti-, Tretriginti-, ...
Quadraginti-, Unquadraginti-, Duoquadraginti-, Trequadraginti-, ...
...

Stellenwertsysteme

Das Dezimalsystem stellt die natürlichen Zahlen mit den zehn Ziffern {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} dar:

$$17023 = 1\cdot10^4 + 7\cdot10^3 + 0\cdot10^2 + 2\cdot10^1 + 3\cdot10^0$$

$3\cdot10^0$

$2\cdot10^1$

$0\cdot10^2$

$7\cdot10^3$

$1\cdot10^4$

Bemerkung: Dass wir als Basis die Zahl 10 benutzen, hängt damit zusammen, dass wir zehn Finger haben. (Aus der Tatsache, dass wir die Eier im Dutzend zählen und Minuten mit sechzig Sekunden benutzen, können wir aber schliessen, dass dies nicht die einzige Möglichkeit ist.)

Das Oktalsystem stellt die natürlichen Zahlen mit den acht Ziffern {0,1,2,3,4,5,6,7} dar:

$$17023_{8} = 1\cdot8^4 + 7\cdot8^3 + 0\cdot8^2 + 2\cdot8^1 + 3\cdot8^0$$
$$= 1\cdot4096 + 7\cdot512 + 0\cdot64 + 2\cdot8 + 3\cdot1$$

$3\cdot8^0$

$2\cdot8^1$

$0\cdot8^2$

$7\cdot8^3$

$1\cdot8^4$

Bemerkung: So, wie das Dezimalsystem die Zahl 10 als Basis hat, ist die Basis des Oktalsystems die Zahl 8. Weitere wichtige Basen sind 2 für das Binärsystem und 16 für das Hexadezimalsystem. (Weil es im Dezimalsystem nur 10 Ziffern gibt, das Hexadezimalsystem jedoch 16 Ziffern benötigt, benutzt man {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b,c,d,e,f} als Ziffern im Hexadezimalsystem.)

Beispiele:

$1011_{2} = 1\cdot8 + 0\cdot4 + 1\cdot2 + 1\cdot1 = 11$

$121_{3} = 1\cdot9 + 2\cdot3 + 1\cdot1 = 16$

$a3b_{16} = 10\cdot256 + 3\cdot16 + 11\cdot1 = 2619$

Primzahlen und die Primzahlzerlegung

Definition: Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die durch genau zwei verschiedene natürliche Zahlen teilbar ist, nämlich durch 1 und durch sich selber.

Bemerkung: Die Zahl 1 ist keine Primzahl, und die Zahl 2 ist die einzige gerade Primzahl.

Beispiele: Die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 sind die ersten zehn Primzahlen.

Satz (Fundamentalsatz der Arithmetik): Jede natürliche Zahl lässt sich bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Beispiel:
$21 = 3 \cdot 7 = 3^1 \cdot 7^1$
$1200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2$

Die Bestimmung der Faktoren für dieses Produkt (der so genannten Primfaktoren) heisst die Primfaktorzerlegung einer Zahl.

Bemerkung: Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die hinterste Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist. Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die hinterste Ziffer 0 oder 5 ist. Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist.

Der grösste gemeinsame Teiler (GGT) von zwei Zahlen lässt sich aus der Primfaktorzerlegung der beiden Zahlen leicht bestimmen.

Beispiel:
Der GGT von $1200 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2$ und $7840 = 2^5 \cdot 5^1 \cdot 7^2$ ist $80 = 2^4 \cdot 5^1$

Das kleinste gemeinsame Vielfache (KGV) von zwei Zahlen lässt sich aus der Primfaktorzerlegung der beiden Zahlen leicht bestimmen.

Beispiel:
Das KGV von $1200 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2$ und $7840 = 2^5 \cdot 5^1 \cdot 7^2$ ist $117600 = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

Eine natürliche Zahl ist eine Quadratzahl, wenn alle Primfaktoren in der Primfaktorzerlegung eine gerade Potenz haben.

Beispiel: $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1)(2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1) = 60^2$

Rechnen mit Einheiten

Zahlen werden nicht nur benutzt zum Zählen, sondern auch für das Messen von Längen etc. Gemessene Grössen haben eine Einheit.

Beispiel: Der Eiffelturm in Paris ist 324 Meter hoch.

Längen werden in Meter, Zeitintervalle in Stunden, Massen in Gramm und Volumen in Liter gemessen.

Neben den Einheiten Meter, Gramm, Liter und so weiter gibt es auch Kilometer, Milligramm und Deziliter.

$10 = 10^1$	Deka-	Zehn	Dezi-	Zehntel
$100 = 10^2$	Hekto-	Hundert	Zenti-	Hundertstel
10^3	Kilo-	Tausend	Milli-	Tausendstel
10^6	Mega-	Million	Mikro-	Millionstel
10^9	Giga-	Milliarde	Nano-	Milliardstel
10^{12}	Tera-	Billion	Piko-	Billionstel
10^{15}	Peta-	Billiarde	Femto-	Billiardstel
10^{18}	Exa-	Trillion	Atto-	Trillionstel
10^{21}	Zetta-	Trilliarde	Zepto-	Trilliardstel
10^{24}	Yotta-	Quadrillion	Yokto-	Quadrillionstel

Neben der Einheit Stunde gibt es auch Sekunden, Minuten, Tage, Wochen, Monate und Jahre.

60 Sekunden = 1 Minute
24 Stunden = 1 Tag
60 Minuten = 1 Stunde
7 Tage = 1 Woche

Es gibt Monate mit 28, 29, 30 und 31 Tagen.
Es gibt Jahre mit 365 und 366 Tagen.

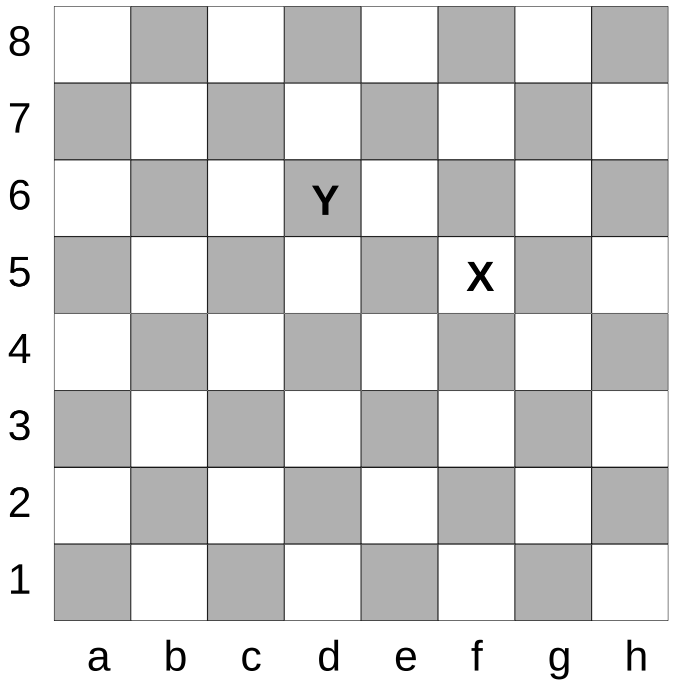
12 Monate = 1 Jahr

Beim Rechnen mit Einheiten bleiben alle Einheiten erhalten.

Beispiele:
120 km : 2 h = 60 km/h (Geschwindigkeit)
10 m · 13 m = 130 m^2 (Fläche)
5 · 12 kg = 60 kg (Gewicht)

Koordinatensysteme

Beim Schach benutzt man die Buchstaben a bis h und die Zahlen 1 bis 8, um die Felder auf dem Schachbrett adressieren zu können:



Das mit **X** markierte Feld heisst f5 und das mit **Y** angeschriebene Feld d6.

Wenn man also angeben will, wie sich der Springer in einem Schachzug bewegt, so kann man sagen: Springer von f5 nach d6.

Die Adressen f5 und d6 nennt man Koordinaten.

Auf ähnliche Weise lassen sich Punkte in der Ebene durch ein aufgespanntes Koordinatensystem adressieren. Der Punkt P beispielsweise hat die Koordinaten (9,3). Die erste Zahl (hier 9) heisst x-Koordinate, und die zweite Zahl (hier 3) heisst y-Koordinate.