Mengen und ihre Darstellung

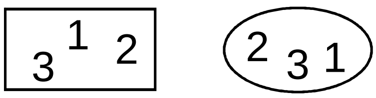
Definition: Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte heissen Elemente von M. Ist das Objekt a ein Element der Menge M, so schreibt man $a \in M$.

Mengen können endlich viele oder unendlich viele Elemente enthalten. Man spricht von endlichen bzw. unendlichen Mengen.

Beispiele:
M = {1, 2, 3, 4}, M = {Deutsch, Französisch, Mathematik}

Mengen sind ungeordnet, d.h. die Mengen {1, 2, 3} und {2, 3, 1} sind gleich. (Listen sind hingegen geordnet, d.h. die Reihenfolge ist wichtig.)

Darstellung von Mengen:
1. Listenform: {1, 2, 3}
2. Grafische Form:

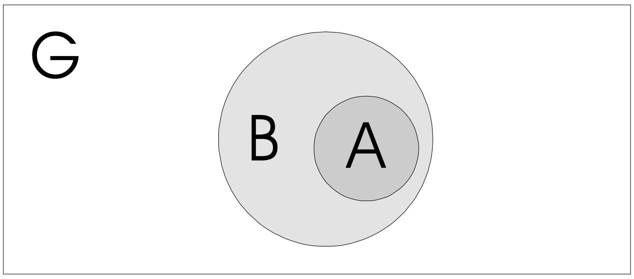


3. Beschreibende Form:
   "Die natürlichen Zahlen von 1 bis 3." = {x | x = 1 oder x = 2 oder x = 3}

Konvention: Mengen in Listenform schreibt man sortiert.

Definition: Die Menge, die keine Elementen enthält, heisst leere Menge und wird als {} geschrieben.

Definition: Eine Menge A heisst Teilmenge der Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. (A heisst echte Teilmenge von B, wenn nicht alle Elemente von B auch Elemente von A sind.)



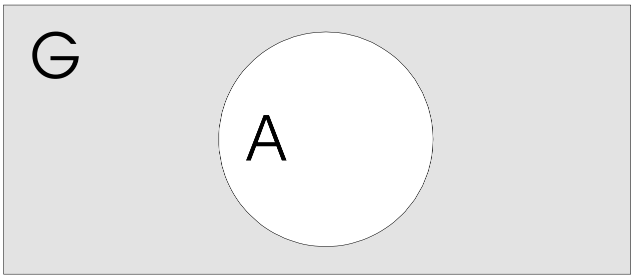
Teilmenge (echte Teilmenge) A von B
"A enthalten in B"

$$A \subseteq B \ (A \subset B)$$

Satz: Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Operationen auf Mengen

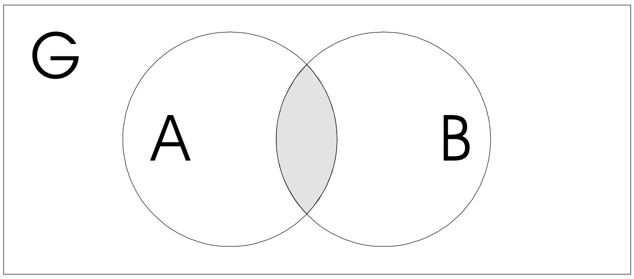
Definition: Die Ergänzungsmenge einer Menge M enthält alle Elemente der Grundmenge G, die nicht zu M gehören.



Ergänzungsmenge von A

$$\overline{A}$$

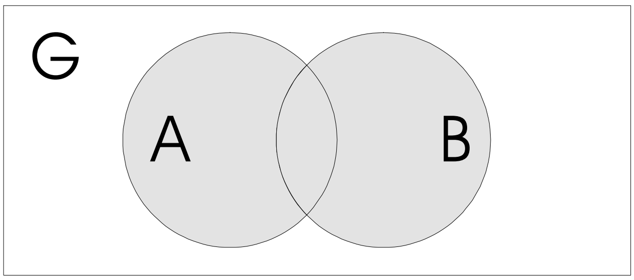
Definition: Die Schnittmenge von zwei Mengen A und B enthält alle Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.



Schnittmenge von A und B
“A geschnitten mit B”

$$A \cap B$$

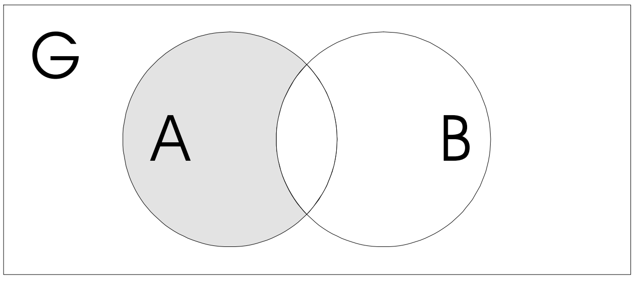
Definition: Die Vereinigungsmenge von zwei Mengen A und B enthält alle Elemente, die in A oder B (oder in beiden) enthalten sind.



Vereinigungsmenge von A und B
“A vereinigt mit B”

$$A \cup B$$

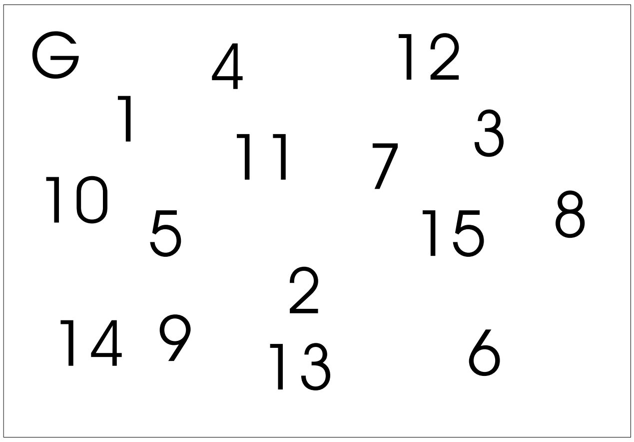
Definition: Die Restmenge von A bezüglich B ist die Menge aller Elemente von A, die nicht auch in B enthalten sind.



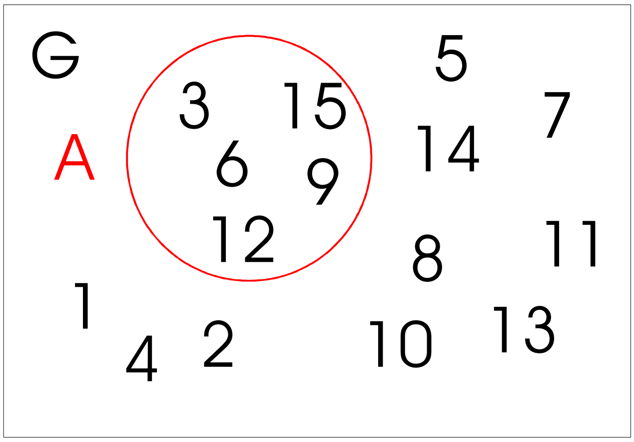
Restmenge von A bezüglich B
“A ohne B”, “A minus B”

$$A \setminus B$$

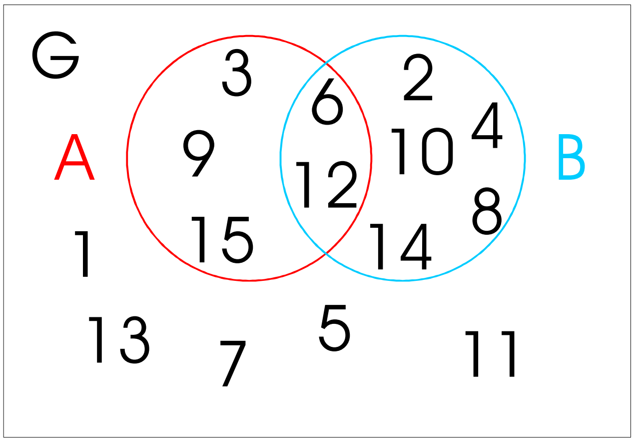
Venn-Diagramme



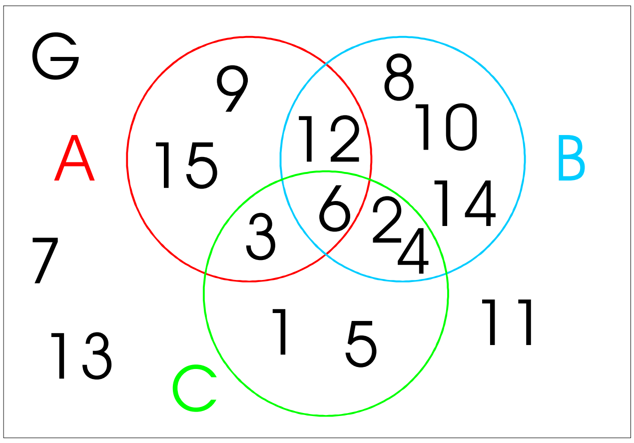
Grundmenge G
“Natürliche Zahlen von 1 bis 15”



Menge A
“Ist durch 3 teilbar”



Menge B
“Ist gerade”



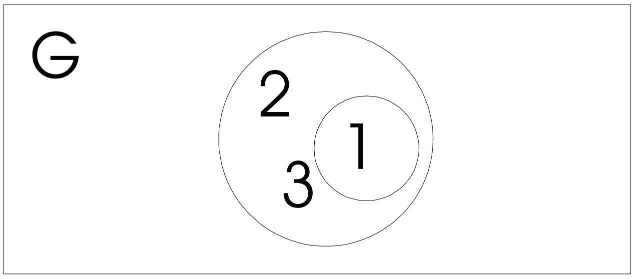
Menge C
“Ist kleiner als 7”

Mächtigkeit

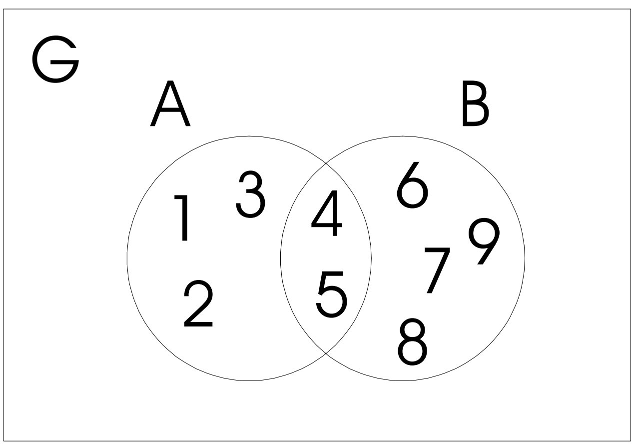
<u>Definition:</u> Die <u>Mächtigkeit</u> einer Menge M, geschrieben als | M |, ist ihre Grösse, also die Anzahl ihrer Elemente.

| {1,3,5} | = 3
| M | = 100 für die Menge M der natürlichen Zahlen kleiner gleich 100

$$A \subseteq B \rightarrow |A| \leq |B|$$
$$A \subset B \rightarrow |A| < |B|$$



$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$



G = Die natürlichen Zahlen kleiner oder gleich 9

A = {1,2,3,4,5}

B = {4,5,6,7,8,9}

Alle Teilmengen einer Menge

Das Pascalsche Dreieck:

0:	1	1 = 1
1:	1 1	1 + 1 = 2
2:	1 2 1	1 + 2 + 1 = 4
3:	1 3 3 1	1 + 3 + 3 + 1 = 8
4:	1 4 6 4 1	1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16
…		

Blaise Pascal (geboren in Clermont-Ferrand am 19. Juni 1623, gestorben in Paris am 19. August 1662), französischer Philosoph, Mathematiker und Physiker. Schrieb 1654 eine Abhandlung über das nach ihm benannte Dreieck.

Berechnungsschritte von oben nach unten:

```
  0 1 2 1 0
0 1 3 3 1 0
```

M = {a,b,c,d}	| M | = 4
1 Teilmenge mit 0 Elementen:	{}
4 Teilmengen mit 1 Elementen:	{a}, {b}, {c}, {d}
6 Teilmengen mit 2 Elementen:	{a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}
4 Teilmengen mit 3 Elementen:	{a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}
1 Teilmenge mit 4 Elementen:	{a,b,c,d}

```
                                        1
                                    1       1
                                1       2       1
                            1       3       3       1
                        1       4       6       4       1
                    1       5      10      10       5       1
                1       6      15      20      15       6       1
            1       7      21      35      35      21       7       1
        1       8      28      56      70      56      28       8       1
    1       9      36      84     126     126      84      36       9       1
1      10      45     120     210     252     210     120      45      10       1
```

Gesetze

Satz: Es gelten folgende Gesetze:

Kommutativgesetze:

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetze:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetze:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$