Die Wurzel aus dem Satz von Pythagoras oder Mathematische Spielerei auf den Spuren von Dirac

Rainer Hauser, rainer.hauser@gmail.com

1 Einleitung

In der Primarschule empfindet man die Addition als viel einfacher als die Multiplikation, aber spätestens im Gymnasium lernt man, dass sie bedeutend mehr Tücken hat. So ist zwar beispielsweise $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$, aber es gilt $a^2 + b^2 \neq (a+b)^2$ bis auf degenerierte Fälle. Die bekannten Potenzgesetze für reelle Zahlen $a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$ und $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ gelten nur für die Multiplikation. Sobald Potenzen und Wurzeln auftreten, wird es mit der Addition schwierig.

Aus dem Satz von Pythagoras kann man also nicht einfach die Wurzel ziehen, indem man aus der bekannten Formel

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

für die Katheten a, b und die Hypotenuse c im rechtwinkligen Dreieck auf $a + b = c$ schliesst, denn $\sqrt{a^2 + b^2}$ ist eben nicht gleich $a + b$, was auch geometrisch offensichtlich ist, denn $a + b$ ist das Zusammensetzen von zwei Strecken der Längen a und b, bei dem die beiden Strecken die gleiche Richtung haben, während beim Satz von Pythagoras der rechte Winkel zwischen den beiden Strecken a und b entscheidend ist. (Der Cosinussatz ist die Verallgemeinerung und beinhaltet beide Situationen.)

Die Gleichung (1) lässt sich zwar zu $c^2 - a^2 = b^2$ umformen und in $(c + a)(c - a) = b^2$ zerlegen, und mit komplexen Zahlen lässt sich sogar $a^2 + b^2 = c^2$ in $(a + ib)(a - ib) = c^2$ direkt aufspalten, aber die Wurzel lässt sich aus $a^2 + b^2 = c^2$ nicht einfach ziehen, indem man daraus auf $a + b = c$ schliesst, um c^2 in $(a + b)(a + b)$ zu faktorisieren. Und doch gibt es einen interessanten Weg, sowas wie die Wurzel aus (1) zu ziehen, wenn man den Überlegungen von Paul Dirac folgt.

2 Der physikalische Hintergrund

In gewissem Sinne kann man behaupten, dass Dirac bei der Herleitung der nach ihm benannten Gleichung die Wurzel aus dem Satz von Pythagoras gezogen hat. Um das zu belegen, muss man etwas ausholen. Gemäss der Speziellen Relativitätstheorie gilt mit c für die Lichtgeschwindigkeit

$$\left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \left(\frac{mc^2}{c}, 0, 0, 0\right) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mc^2}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für den Energie-Impuls-Vierervektor links in einem Bezugssystem mit Impuls (p_x, p_y, p_z) und Energie E und rechts im Ruhesystem mit der Masse m und der Energie $E = mc^2$. Ausmultipliziert gibt das

$$-\frac{E^2}{c^2} + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = -m^2c^2$$

oder umgeformt

$$\frac{E^2}{c^2} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2c^2$$

im Hinblick auf die pythagoräische Formel $c^2 = a^2 + b^2$. Übersetzt in die Sprache der quantenmechanischen Operatoren $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ und analog für p_y und p_z gibt das die Gleichung

$$\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - m^2c^2$$

genannt Klein-Gordon-Gleichung, die für relativistische Teilchen gültig ist.

Wie Dirac auf die Idee gekommen ist, daraus die Wurzel zu ziehen, ist vermutlich nicht an die Nachwelt überliefert worden. Er versuchte jedenfalls, aus dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung eine Differentialgleichung erster Ordnung mit dem Ansatz

$$i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} = -i\hbar\left(\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z\frac{\partial}{\partial z}\right) + \beta mc$$

zu bestimmen, die "quadriert" wieder die Klein-Gordon-Gleichung ergeben sollte. Die Grössen α_x, α_y, α_z und β können keine Zahlen sein, weil sie nicht kommutieren, sondern antikommutieren, sodass beispielsweise $\alpha_x\alpha_y = -\alpha_y\alpha_x$ gelten muss, damit die gemischten Terme verschwinden. Es gibt vier solche Grössen in Form von vier komplexen 4×4-Matrizen, welche die benötigten Bedingungen erfüllen. Sie heissen Dirac-Matrizen, und die entsprechende Gleichung, die quasi der Wurzel aus der Klein-Gordon-Gleichung entspricht, heisst Dirac-Gleichung. Die Objekte, welche die Dirac-Gleichung erfüllen, heissen Spinoren, haben Spin $\frac{1}{2}$ und spielen in der Teilchenphysik die Rolle der Fermionen, aus denen die Materie besteht. In [1] wird die Gleichung in der heute in der Teilchenphysik üblichen Weise mit vier γ-Matrizen statt α_x, α_y, α_z und β und mit der alternativen Minkowski-Metrik hergeleitet, die $1, -1, -1, -1$ in der Diagonale hat, die sich in der Teilchenphysik eingebürgert hat.

Leonard Susskind in seiner Vorlesungsserie über Teilchenphysik [2] führt die Dirac-Gleichung in zwei Schritten ein. Erst nimmt er eine relativistische Raumzeitgeometrie mit nur einer Raumdimension neben der Zeitdimension an, sodass er mit einem α und einem β auskommt, und erweitert die Herleitung anschliessend auf alle drei Raumdimensionen.

3 Mathematische Problemstellung

Nimmt man also den Ansatz von Dirac reduziert auf zwei Dimensionen gemäss Susskind und vergisst die Übersetzung in quantenmechanische Operatoren mit dem ganzen Rest der Physik, so bleibt der mathematische Ansatz

$$\alpha a + \beta b = \gamma c \tag{2}$$

für die Wurzel aus $a^2 + b^2 = c^2$. Ausmultipliziert lässt sich $(\alpha a + \beta b)^2 = (\gamma c)^2$ als

$$\alpha a\alpha a + \alpha a\beta b + \beta b\alpha a + \beta b\beta b = \gamma c\gamma c$$

schreiben, wobei angenommen ist, dass das Assoziativgesetz gilt, sodass man keine Klammern schreiben muss. In Bezug auf das Kommutativgesetz sei zudem angenommen, dass a, b und c als Zahlen miteinander und mit α, β und γ kommutieren. Damit lässt sich die Gleichung in

$$\alpha^2a^2 + \alpha\beta ab + \beta\alpha ab + \beta^2b^2 = \gamma^2c^2 \tag{3}$$

umformen. Wenn diese Gleichung mit $a^2 + b^2 = c^2$ übereinstimmen soll, so muss auf jeden Fall $\alpha\beta = -\beta\alpha$ gelten, was bedeutet, dass α und β für eine nicht-triviale Lösung sicher keine Zahlen sein können. Die Grössen α, β und γ sollen aber zu einer Gruppe mit dem neutralen Element **1** gehören, sodass man $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \mathbf{1}$ und $\alpha\beta = -\beta\alpha$ verlangen muss, damit die Gleichung (3) mit $\mathbf{1}a^2 + \mathbf{1}b^2 = \mathbf{1}c^2$ übereinstimmt.

Die Wurzel aus $a^2+b^2 = c^2$ mit dem Ansatz (2) ist das einfachere Problem als die Herleitung der Dirac-Gleichung aus der Klein-Gordon-Gleichung, weil sie nur 2×2-Matrizen braucht und keine komplexen Zahlen verlangt. Nimmt man beispielsweise die beiden reellen Pauli-Matrizen und die Einheitsmatrix

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

für α, β und γ, so ergibt das

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c$$

für den Ansatz $\alpha a + \beta b = \gamma c$. Quadriert man diese Gleichung, bekommt man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c^2$$

wegen $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \gamma$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

und der Antikommutativität $\alpha\beta = -\beta\alpha$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

für die Pauli-Matrizen.

4 Anfängliche Tücken mit der Lösung

Die spannende Frage ist jetzt, welche Objekte a, b und c diese Gleichung erfüllen. Nimmt man Zahlen für a, b und c wie etwa das berühmteste der pythagoräischen Tripel, so müsste also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} 3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} 4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 5$$

gelten. Das stellt sich aber sofort als Irrtum heraus, denn

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich nicht das, was man erwarten würde. Bei Wurzeln aus Gleichungen muss man immer aufpassen, denn nimmt man beispielsweise die Gleichung $4 = 4$, so ist zwar $2^2 = 4$ und $(-2)^2 = 4$, aber trotzdem ist $2 = -2$ falsch. Im Fall der Wurzel aus $a^2 + b^2 = c^2$ scheint man jedoch auf mehr als nur auf die Vorzeichen achten zu müssen, denn

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

hat nur eine triviale Lösung, sodass a, b und c für interessantere Lösungen keine Zahlen sein können.

Die Spinoren als Lösungen der Dirac-Gleichung sind Objekte mit vier Komponenten, was übrigens nur zufällig mit der Dimension vier der relativistischen Raumzeitgeometrie übereinstimmt. Entsprechend kann man hier versuchen, Objekte mit zwei Komponenten als Lösung der Wurzel aus dem Satz von Pythagoras zu suchen. Aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

folgen die zwei Gleichungen $a_1 + b_2 = c_1$ und $-a_2 + b_1 = c_2$ oder

$$\left| \begin{array}{rl} b_1 = & c_2 + a_2 \\ b_2 = & c_1 - a_1 \end{array} \right| \tag{7}$$

als Bedingungen an diese Vektoren mit zwei Komponenten. Als Nebenbemerkung sei erwähnt, dass auch bei der Dirac-Gleichung der Masseterm βmc die Komponenten der Spinoren mischt, wie das in diesen beiden Gleichungen passiert, in denen b_1 aus a_2 und c_2 berechnet wird, während b_2 aus a_1 und c_1 gebildet wird.

In der Überzeugung, dass das jetzt klappen muss, kann man als Beispiel, das die Bedingungen (7) erfüllt, die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wählen, wobei die Gleichung (3) jetzt

$$(\alpha\vec{a})^T(\alpha\vec{a}) + (\alpha\vec{a})^T(\beta\vec{b}) + (\beta\vec{b})^T(\alpha\vec{a}) + (\beta\vec{b})^T(\beta\vec{b}) = (\gamma\vec{c})^T(\gamma\vec{c}) \tag{8}$$

bedeutet. Weil ja wegen der Antikommutativität der Pauli-Matrizen die gemischten Terme verschwinden sollten, gibt das mit den Identitäten (5)

$$(2,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (3,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (3,2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder ausgerechnet $4+1+9+1 = 9+4$, was aber offensichtlich falsch ist und somit etwas mehr Vorsicht verlangt.

5 Korrekte Lösung

Das Problem ist, dass zwar für Zahlen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ sowie Matrizen α und β $(\alpha a)(\beta b) = ab\alpha\beta$ wie oben vorausgesetzt gilt, womit $ab\alpha\beta = -ab\beta\alpha$ durch ab dividiert werden darf, dass dies aber für Vektoren nicht mehr notwendigerweise richtig sein muss. Die Eigenschaften (6) genügen nicht, damit $(\alpha\vec{a})^T(\beta\vec{b}) + (\beta\vec{b})^T(\alpha\vec{a}) = \vec{a}^T\alpha^T\beta\vec{b} + \vec{b}^T\beta^T\alpha\vec{a}$ in (8) verschwindet. Weil für die beiden Pauli-Matrizen $\alpha^T = \alpha$ und $\beta^T = \beta$ gilt, lässt sich die zusätzlich nötige Bedingung als

$$(a_1, a_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + (b_1, b_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

schreiben. Das bedeutet somit $2(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ oder $a_1b_2 = a_2b_1$, was in der Form

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \tag{9}$$

einfach heisst, dass der eine Vektor ein Vielfaches des andern sein muss.

Jetzt sollte eigentlich nichts mehr schiefgehen. Wählt man also beispielsweise die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aus, die sowohl die Bedingung (7) als auch die Bedingung (9) erfüllen, so klappt es, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt für die "Wurzel" sowie

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right]^T \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^T \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = (7,1) \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 50$$

und

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^T \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = (5,0) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 50$$

für das "Quadrat" daraus. Entsprechend ist auch

$$(1,2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (3,6) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = (7,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder ausgerechnet $1 + 4 + 9 + 36 = 49 + 1$.

6 Schlussbemerkung

Das hier präsentierte mathematische Problem, bei dem man versucht, die Wurzel aus dem Satz von Pythagoras zu ziehen, mag aussehen, als sei es an den Haaren herbeigezogen, und auch die Nützlichkeit der gefundenen Lösung ist fraglich. Die ganze Spielerei basiert im Wesentlichen auf der Gleichung $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = c_1^2 + c_2^2$, wenn man $c_1 = a_1 + b_2$ und $c_2 = b_1 - a_2$ gemäss Bedingung (7) sowie $b_1 = ba_1$ und $b_2 = ba_2$ gemäss Bedingung (9) benutzt. (Der uninteressante Fall $\vec{a} = \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ ist hier ignoriert worden.) Das gibt

$$a_1^2 + a_2^2 + (ba_1)^2 + (ba_2)^2 \equiv (a_1 + ba_2)^2 + (ba_1 - a_2)^2$$

eingesetzt, und das ist eine Identität.

Interessant ist aber, dass Paul Dirac auf diese oder ähnliche Art eine Gleichung gefunden hat, die für die moderne Physik von riesiger Bedeutung ist. Mit ihr hat man vor bald hundert Jahren, als Protonen und Neutronen noch als Elementarteilchen galten, die Bestandteile und Struktur der Atome langsam besser verstehen gelernt, und von ihr stammte erst die Vermutung, dass es nicht nur Materie, sondern auch Antimaterie geben könnte.

Links

[1] Dirac-Gleichung in *Wikipedia* (de.wikipedia.org/wiki/Dirac-Gleichung)

[2] Leonard Susskind, Vorlesungen über *Particle Physics 1: Basic Concepts* in *The Theoretical Minimum* (theoreticalminimum.com/courses/particle-physics-1-basic-concepts/2009/fall)