Zählen ist Messen in der nullten Dimension
Oder: Was macht man mit halben Koordinatenachsen?

Rainer Hauser, Thalwil, Schweiz
(rainer.hauser@gmail.com)

Zusammenfassung

Die Dimension eines Vektorraums ist offensichtlich immer eine ganzzahlige Grösse. Es gibt aber daneben auch eine masstheoretische Definition der Dimension von Räumen und Teilen davon, die über die Selbstähnlichkeit bestimmt ist und zu beliebigen nicht-negativen reellen Zahlen als Dimension einer Punktmenge führen kann. Sie ist so gewählt, dass das Mass einer kompakten, nichtleeren Punktmenge eine Zahl grösser als Null und kleiner als Unendlich wird. Diese Definition kann durchaus im Unterricht auf gymnasialer Stufe eingeführt und zur Herleitung einiger nicht-trivialer Einsichten verwendet werden. Sie kann auch dazu benutzt werden, um ein vertieftes Verständnis für die Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Zählen und Messen als historisch früh entstandene, ursprüngliche mathematischen Tätigkeiten zu gewinnen.

1 Eine Basis aus zweieinhalb Vektoren

Meine Betrachtungen zum Thema Dimension wurden angeregt durch ein Gespräch, das ich vor einem Jahr in einem Bus zwischen zwei Schülern, die vermutlich kurz vor der Matur standen, belauschte. Es ging anfänglich um die vierte Dimension und Folgerungen daraus. Nach einer Pause meinte der eine Schüler plötzlich wahrscheinlich mit Bezug auf eine frühere Diskussion, es sei gar nicht wahr, dass man Zahlen in jedem Fall auf reelle Zahlen erweitern könne, denn die Dimension müsse immer eine ganze Zahl sein.

So unklar mir der Zusammenhang war, in dem diese Behauptung gemacht wurde, so gern hätte ich mich in das Gespräch eingemischt und der Schlussfolgerung widersprochen. Ich tat es dann doch nicht, möchte aber hier darauf eingehen. Eine für die oberen Klassen im Gymnasium taugliche Erklärung dafür, dass die Dimension nicht unbedingt ganzzahlig sein muss, braucht keine komplizierten, mathematisch exakten Definitionen wie etwa die Hausdorff-Dimension, sondern kann mit einfachen, intuitiv verständlichen Mitteln auskommen.

Mit dem Begriff Dimension verbindet man normalerweise die Zahl Eins für eine Gerade, die Zahl Zwei für eine Ebene und die Zahl Drei für den gesamten Raum, der uns umgibt, und den man mathematisch als Vektorraum oder als Euklid'schen Raum modelliert. Diese Vorstellung führt zum n-dimensionalen Raum, den man mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, der von n Basisvektoren aufgespannt ist, und in dem das kartesische Koordinatensystem mit n senkrecht aufeinander stehenden Achsen bei expliziten Berechnungen hilft. Die Zahl n ist eine natürliche Zahl.

Mathematiker lieben es, Begriffe zu verallgemeinern. So wurden aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Die Multiplikation, die ursprünglich aus der Addition einer Anzahl gleicher Summanden entstand, wie auch die Potenz, die zur Vereinfachung der Schreibweise für die Multiplikation einer Anzahl gleicher Faktoren eingeführt wurde, lösten sich schnell von dieser Abhängigkeit vom Konzept Anzahl und damit auch von den natürlichen Zahlen, sodass Faktoren und Exponenten jetzt beliebige reelle (oder komplexe) Zahlen sein können.

Bleibt man bei der Definition der Dimension im Vektorraum als die Mächtigkeit eines minimalen Erzeugendensystems oder anschaulich als Anzahl Achsen im Koordinatensystem, so kann man sich schwerlich vorstellen, wie man den Begriff Dimension auf beliebige nicht-negative reelle Zahlen erweitern könnte. Selbst wenn man zum Begriff Matroid als Verallgemeinerung von Vektorräumen und ähnlichen Strukturen in der Graphentheorie übergeht, bleibt die Dimension, die dort Rang heisst, eine natürliche Zahl.

In Euklid'schen Räumen spielen aber nicht nur affine Aspekte wie die lineare Abhängigkeit von komplanaren Vektoren, sondern auch metrische Aspekte wie das Mass einer Punktmenge eine Rolle, und hier ist die Dimension ebenfalls eine wichtige Grösse. Wir sind uns gewohnt, ein Stück Kurve in Meter, ein Stück Fläche in Quadratmeter und ein Stück Raum in Kubikmeter zu messen. Diese masstheoretische Seite des Begriffs Dimension und die obige Definition als Mächtigkeit eines minimalen Erzeugendensystems passen für "normale", zusammenhängende und einfach begrenzte Punktmengen bestens zusammen. Dass man beim Wechsel von der Einheit Meter zur Einheit Dezimeter mit einem Faktor zehn, beim Wechsel von der Einheit Quadratmeter zur Einheit Quadratdezimeter mit einem Faktor hundert und beim Wechsel von der Einheit Kubikmeter zur Einheit Kubikdezimeter mit einem Faktor tausend multiplizieren muss, ist uns selbstverständlich.

2 Balanceakt zwischen Null und Unendlich

Der Unterschied zwischen Länge und Fläche war aber nicht immer so klar. Das englische Mass "Furlong" ist ein Längenmass, das sehr eng mit dem Flächenmass "Acre" verbunden ist. Wenn man einen Acker mit einem Pflug bearbeitet und dabei dafür sorgt, dass alle Furchen den gleichen standardisierten Abstand von einander haben, so ist die Gesamtlänge der Furchen effektiv ein Mass für die Fläche eines Feldes. Im Allgemeinen lassen sich Flächen aber nicht mit einem Längenmass und Längen nicht mit einem Flächenmass messen. Eine Strecke von einem Meter Länge hat die Fläche Null, weil sie beliebig dünn ist, und eine Fläche von einem Quadratmeter hat die Länge Unendlich, weil es eben keinen minimalen Abstand für die Furchen gibt. Deshalb muss man beim Messen aufpassen, dass man die richtige Einheit wählt, um ein brauchbares, endliches Mass zu bekommen. Die Grösse, die uns bei diesem Balanceakt zwischen Null und Unendlich unterstützt, ist wieder die Dimension, diesmal jedoch nicht mehr definiert als Mächtigkeit eines minimalen Erzeugendensystems, sondern durch masstheoretische Überlegungen. Wählen wir sie zu gross, wird das Mass Null. Wählen wir sie hingegen zu klein, wird das Mass Unendlich.

Messen in der Geometrie hat immer etwas mit den Kongruenzabbildungen zu tun. Sind zwei Figuren kongruent, so haben sie das gleiche Mass. Wenn ich einen Meterstab so verschiebe, drehe und – was nicht ganz so einfach, in diesem Fall aber auch gar nicht nötig ist – spiegle, dass er auf dem zu messenden Objekt zu liegen kommt, kann ich dessen Länge ablesen. Hier spielt die Dimension noch keine Rolle. Eine weitere Forderung an das Messen kommt von der Ähnlichkeit. Wenn man eine geometrische Figur vergrössert oder verkleinert, oder wenn man die Einheiten, in denen man misst, anders wählt, so erwartet man, dass sich das Mass entsprechend ändert. Wenn ich etwa die Kanten eines Quaders verzehnfache oder seinen Inhalt in Kubikdezimeter statt Kubikmeter messe, so vertausendfacht sich der für das Volumen gemessene Wert.

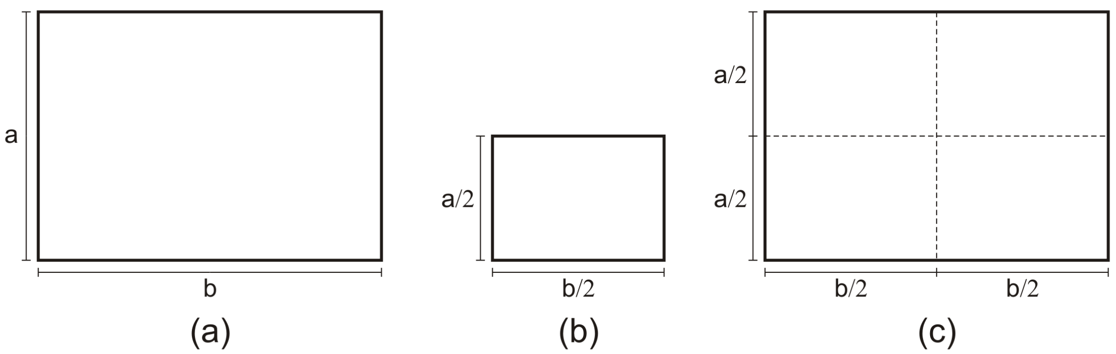

Abbildung 1: Selbstähnlichkeit eines Rechtecks.

Die Abbildung 1 veranschaulicht diesen Vorgang am Beispiel eines Rechtecks, dessen Kanten halbiert wurden. Das ursprüngliche Rechteck mit Seitenlängen a und b ist in Abbildung 1(a) und das verkleinerte Rechteck in Abbildung 1(b) gezeigt. Abbildung 1(c) zeigt, wie man mit vier Kopien des verkleinerten Rechtecks das ursprüngliche Rechteck exakt überdecken kann. Man kann somit erwarten, dass die Fläche des grossen Rechtecks viermal die Fläche des kleinen Rechtecks ist. Das nennt man Selbstähnlichkeit, denn das grosse Rechteck ist zu den vier kleinen Rechtecken – also zu Teilen seiner selbst – ähnlich.

Weil man dasselbe Spiel auch durchführen kann, indem man die Kanten des Rechtecks drittelt, viertelt oder durch irgendeine natürliche Zahl n teilt, statt sie zu halbieren, und man immer noch feststellt, dass die so entstandenen n^2 Rechtecke zum ursprünglichen Rechteck ähnlich sind und dieses exakt überdecken, lässt sich die Gesetzmässigkeit ableiten, dass der Faktor, mit dem sich die Fläche beim Übergang vom grossen Rechteck zu den kleinen Rechtecken verkleinert, gleich dem quadrierten Faktor ist, mit dem sich die Seitenlängen verkleinern. Es gibt also ein vorgegebenes Mass L, mit dem wir lineare Grössen (hier die Seitenlängen) messen, und ein abgeleitetes Mass M, mit dem wir die zu untersuchende Punktmenge (hier die Rechtecksfläche) messen, und diese beiden Grössen hängen durch $M = L^2$ zusammen. Bei einem Quader, dessen Kanten wir in n gleiche Teile zerschneiden, sodass n^3 zum ursprünglichen Quader ähnliche, aber kleinere Quader entstehen, heisst der Zusammenhang $M = L^3$.

Geht man davon aus, dass man als Referenzmass immer ein lineares Mass L – also einen Meterstab zur Messung von Längen – zur Verfügung hat, so kann man diese Formel zu

$$M = L^d \tag{1}$$

für das zu berechnende Mass M und die Dimension d der zu messenden Punktmenge verallgemeinern. Daraus folgt $\log M = d \cdot \log L$ und somit die Gleichung

$$d = \frac{\log M}{\log L} \tag{2}$$

für die Dimension. Diese Gleichung besagt, dass die Dimension eines Rechtecks 2 ist, weil man n^2 kongruente Rechtecke braucht, um daraus ein grosses, zu diesen kleineren Rechtecken ähnliches Rechteck mit n-facher Seitenlänge zu konstruieren, während die Dimension eines Quaders analog 3 ist, weil man n^3 kongruente Quader benötigt, um daraus einen grossen, zu diesen kleineren Quadern ähnlichen Quader mit n-facher Kantenlänge zu fabrizieren.

Für alltägliche geometrische Figuren wie Strecken, Rechtecke und Quader sind die obigen Betrachtungen zwar richtig, machen aber noch nicht wirklich Sinn. Erst wenn man zu anderen Punktmengen wie die in der Abbildung 2 gezeigte Kochkurve übergeht, führen sie zu neuen Einsichten.

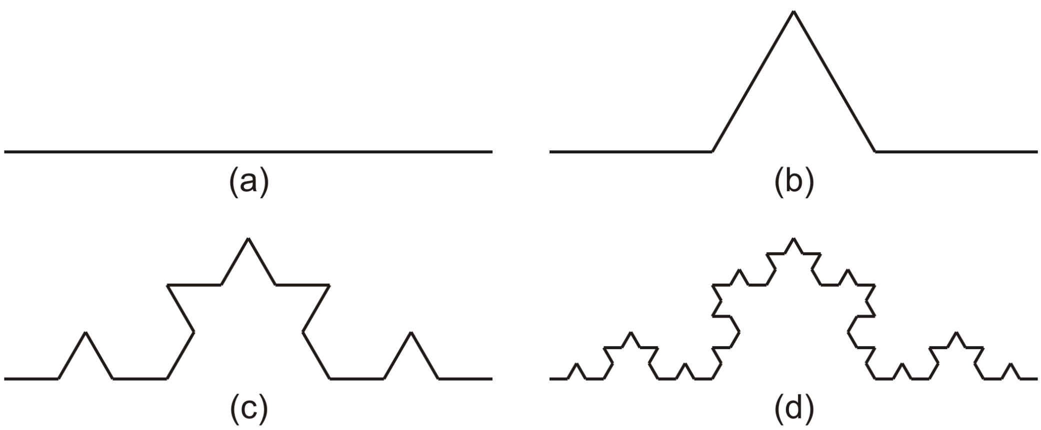

Abbildung 2: Vier Iterationen der Kochkurve.

Die Kochkurve ist das Ergebnis von unendlich vielen Schritten, von denen die ersten vier in Abbildung 2 vorgestellt werden. Man beginnt mit einer Strecke wie in Abbildung 2(a), drittelt sie, ersetzt das mittlere Stück durch zwei Strecken, die gleich lang sind wie das ersetzte Drittel, und bekommt die in Abbildung 2(b) gezeigte Figur. Im nächsten Schritt drittelt man jede der vier Strecken und verfährt gleich wie vorher mit der ursprünglichen Strecke, was zur Figur in Abbildung 2(c) führt. In derselben Weise bekommt man im nächsten Schritt das in Abbildung 2(d) präsentierte Resultat.

Der Grenzwert dieser nicht abbrechenden Konstruktion hat eine unendliche Länge, denn mit jedem Schritt vergrössert sich die Länge um den Faktor 4/3. (Die Längen bilden also eine geometrische Folge mit einem Quotienten grösser als 1.) Gefühlsmässig würde man aber auch nicht vermuten, dass die resultierende Figur nach unendlich vielen Schritten eine Fläche ist, die man in Quadratmeter messen kann, sondern dass sie die Fläche Null hat. (Die durch die ursprüngliche Strecke nach unten und durch die Kochkurve nach oben begrenzte Fläche lässt sich hingegen messen und hat einen endlichen Wert, wie man unter http://de.wikipedia.org/wiki/Kochkurve nachlesen kann.) Trotzdem ist diese aus den Punkten der Kochkurve allein bestehende Punktmenge in gewissem Sinne messbar, wenn man annimmt, dass die beiden Gleichungen (1) und (2) allgemein gelten und eine masstheoretische Grösse namens Dimension definieren.

Hier kommt die Selbstähnlichkeit ins Spiel, die beim Rechteck in der Abbildung 1 zwar ebenfalls existierte, dort aber noch nichts Wesentliches zum Verständnis beitrug. Die ganze Kochkurve ist ähnlich zu jedem der vier Teilkurven, die aus den vier Strecken in der Abbildung 2(b) entstehen. (Es ist zu beachten, dass diese Ähnlichkeit eine Folge der unendlich vielen Konstruktionsschritte ist, denn nach nur endlich vielen Schritten sind die Teile nicht ähnlich zum Ganzen.) Setzt man jetzt aus vier gleichen Kochkurven eine grössere Kochkurve zusammen, deren lineares Mass L – also die Länge vom Punkt ganz links zum Punkt ganz rechts – dreimal so gross ist wie dasjenige der ursprünglichen Kochkurve, so vergrössert sich das Mass M um einen Faktor vier, weil man ja vier gleiche Kochkurven zusammengesetzt hat. Somit berechnet sich die Dimension nach Gleichung (2) zu $d = \log 4/\log 3 \approx 1.26$.

3 Meter hoch eine gebrochene Zahl

Wir haben in der Kochkurve also ein Beispiel für eine Punktmenge mit einer nicht-ganzzahligen Dimension gefunden. Wird ihre Länge – also ihr lineares Mass – in Meter (m) gemessen, so wird sie selber in der Einheit Meter hoch 1.26 ($m^{1.26}$) gemessen. Darunter kann sich vermutlich kaum jemand konkret etwas vorstellen. Weil 1.26 erstens sowieso nur gerundet und zweitens keine besonders einfache Zahl ist, suchen wir lieber eine Punktmenge mit einer etwas angenehmeren Dimension. Eine solche finden wir in einer Variante der Cantormenge, deren Konstruktionsschritte in der Abbildung 3 gezeigt sind. (Wir haben deshalb nicht die normalerweise als Cantormenge bezeichnete Punktmenge gewählt, weil diese die Dimension $d = \log 2/\log 3 \approx 0.63$ hat, was ebenfalls keine besonders einfache Zahl ist.)

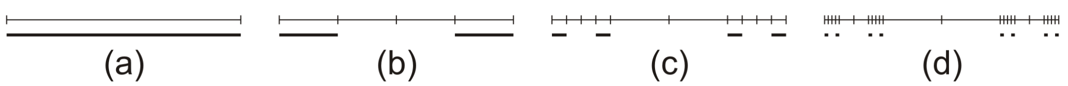

Abbildung 3: Vier Iterationen einer Cantormenge.

Um diese Punktmenge zu konstruieren, beginnt man mit der in Abbildung 3(a) dargestellten Strecke wie bei der Kochkurve, schneidet dann aber nur die mittlere Hälfte davon weg, ohne sie durch etwas zu ersetzen. (Zum besseren Verständnis ist bei den Konstruktionsschritten jeweils ein Massstab über der resultierenden Menge eingezeichnet worden.) Mit den beiden verbleibenden, in Abbildung 3(b) als Resultat dieser Operation gezeigten Strecken verfährt man gleich, erhält die vier in Abbildung 3(c) gezeigten Strecken und schneidet auch bei diesen die mittlere Hälfte weg, sodass die acht bereits sehr kurzen Strecken in Abbildung 3(d) übrig bleiben. Dieser Vorgang wird wie bei der Kochkurve wiederholt, bis nach unendlich vielen Schritten die Cantormenge als Grenzwert übrig bleibt.

Ihre Dimension bestimmt man wie oben. Möchte man aus solchen Mengen eine grössere zusammensetzen, so braucht man zwei und verdoppelt damit das Mass M der Punktmenge, vervierfacht jedoch das lineare Mass L, weil man zwischen die beiden Cantormengen noch zwei gleich lange Stücke ohne Punkte einfügen muss. Die Dimension bestimmt sich wieder aus der Gleichung (2), und wir bekommen $d = \log 2 / \log 4 = 0.5$, was zwar eine hübsche Zahl ist, was es aber immer noch nicht leicht macht, sich mit Hilfe der dazu passenden Cantormenge etwas unter der Einheit Meter hoch ein Zweitel ($\mathrm{m}^{1/2}$) vorzustellen.

Um einerseits ein Gefühl dafür zu bekommen, was eine Einheit hoch eine gebrochene Zahl ist, und um andererseits zu überprüfen, ob die masstheoretisch definierte Dimension zu konsistenten Ergebnissen führt und nicht nur eine sinnlose Zahl ist, betrachten wir das Beispiel einer Sierpinskimenge in der Abbildung 4. Bei der Konstruktion solcher Mengen geht man von einem Quadrat aus, das man in n gleich grosse Quadrate zerlegt. Von diesen kleinen Quadraten wählt man eine feste Anzahl und Anordnung aus, die man entfernt, während man die übrig bleibenden Quadrate wieder gleich behandelt wie das ursprüngliche Quadrat. Die Sierpinskimenge ist wie schon bei der Kochkurve und der Cantormenge der Grenzwert dieser Konstruktion nach unendlich vielen Schritten. Sie ist das zweidimensionale Pendant zur eindimensionalen Cantormenge. Bei der Sierpinskimenge in Abbildung 4 ist das ursprüngliche, in Abbildung 4(a) vorgestellte Quadrat in vier kleinere Quadrate zerlegt worden, von denen wie in Abbildung 4(b) gezeigt die Quadrate oben links und unten rechts entfernt werden. Mit den verbleibenden beiden Quadraten verfährt man gleich und erhält nach einem weiteren Schritt beziehungsweise nach zwei weiteren Schritten die Situationen in den Abbildungen 4(c) und 4(d).

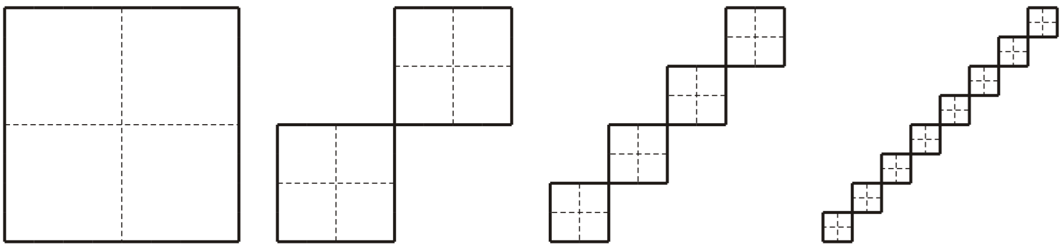

Abbildung 4: Vier Iterationen einer Sierpinskimenge.

Um aus solchen Mengen eine grössere zu konstruieren, braucht man zwei dieser Mengen, sodass $M = 2$ gilt, und man verdoppelt dabei die Länge, sodass auch $L = 2$ gilt. Entsprechend ist die Dimension $d = 1$. Das scheint vernünftig, denn das Resultat nach endlich vielen Schritten sieht wie eine digitalisierte Strecke aus, sodass es nachvollziehbar ist, dass der Grenzwert eine Strecke der Dimension 1 ist. Es gibt natürlich noch andere Sierpinskimengen mit derselben Dimension. Teilt man beispielsweise das ursprüngliche Quadrat wie ein Schachbrett in n^2 Quadrate und behält n irgendwie angeordnete Felder, so hat die resultierende Sierpinskimenge zwar ebenfalls die Dimension 1, sieht aber im Allgemeinen nicht mehr wie eine Strecke aus.

Wir sind uns gewohnt, den Meter als grundlegendes Mass für Längen, Quadrat- und Kubikmeter aber als abgeleitete Masse für Flächen und Volumen zu sehen. Hätte ein Volk jedoch nicht erst ein Mass für Längen, sondern direkt ein Mass für Flächen erfunden, weil nur die gerechte Verteilung von Ackerland von Interesse war, Längen aber niemand brauchte, liesse sich die Gleichung (2) immer noch anwenden, wobei L als Referenzmass jetzt ein Flächenmass wäre. (Man kann sich vorstellen, dass Flächen durch normierte, quadratische Platten gemessen werden.) Die Sierpinskimenge in Abbildung 4 hätte dann die Dimension $d = 1/2$, weil sich die Fläche L als Referenzmass vervierfacht, während sich das Mass M nur verdoppelt. Auch das macht Sinn, denn gemessen in Aren mit $1\mathrm{a} = 100\mathrm{m}^2$ sind $10\mathrm{m} = 1\mathrm{a}^{1/2}$. In gleicher Weise kann man aus dem Liter als Hohlmass mit $1\mathrm{dm} = 1\mathrm{l}^{1/3}$ ein Längenmass gewinnen. Das sind zwei Beispiele von Einheiten hoch einen Bruch, die man bis zu einem gewissen Grad verstehen kann.

4 Zählen und Messen

Nicht nur bei der vierten Dimension, die mathematisch interessierte Menschen wie die beiden von mir im Bus belauschten Schüler nach wie vor fasziniert, sondern auch bei chaotischen Punktmengen mit irgendwelchen Werten für die Dimension kommt die menschliche Vorstellungskraft, wie wir gesehen haben, schnell an ihre Grenzen. Nur Strecken als eindimensionale und einfach berandete Flächen und Körper als zwei- und dreidimensionale Objekte sind uns geläufig. Wie steht es aber mit dem Punkt als nulldimensionalem Objekt? Mit dieser Frage wollen wir uns zum Schluss befassen.

Weil jede von Null verschiedene Grösse hoch Null immer Eins ergibt, muss auch für Einheiten wie Meter, Kilometer und Millimeter $\mathrm{m}^0 = \mathrm{km}^0 = \mathrm{mm}^0 = 1$ gelten. Das heisst aber, in der nullten Dimension verschwinden die Einheiten. Wegen Gleichung (1) ist das Mass M eines Punktes unabhängig von L immer 1. Weil sich die Masse disjunkter Punktmengen bei der Vereinigung addieren, und weil je aus einem einzelnen Punkt bestehende Punktmengen genau dann disjunkt sind, wenn die Punkte verschieden sind, ist Zählen Messen in der nullten Dimension, und das Mass von n verschiedenen Punkten ist einfach die Anzahl n. Die Kardinalität übernimmt somit – für endliche Punktmengen – die Rolle des Masses. Als zwar verwandte, aber doch verschiedene Tätigkeiten haben sich Zählen und Messen in der Geschichte teils recht unterschiedlich entwickelt, wie man in *How Mathematics Happened – The First 50,000 Years* von Peter S. Rudman (Prometheus Books, Amherst, 2007) nachlesen kann. Dazu gab es aber keinen Grund, denn Zählen ist so betrachtet einfach eine Form von Messen. Praktisch mag das keine allzu nützliche Erkenntnis sein, interessant ist sie allemal.