

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Rainer Hauser

Dezember 2012

1 Einleitung

1.1 Zufallsexperimente

Im Folgenden wird das Resultat eines Experiments als *Ereignis* bezeichnet. Lässt man eine Metallkugel aus einer gewissen Höhe auf den Boden fallen, so ist das Experiment das Fallenlassen der Metallkugel und das Ereignis der Aufschlag auf dem Boden. Ist man nur an der Zeit zwischen Loslassen und Aufschlag interessiert, so ist die gemessene Zeit das Ereignis als Resultat des Experiments. Bei physikalischen Experimenten ist das Resultat normalerweise (ausser bei quantenmechanischen Effekten) vorhersehbar, weil Naturwissenschaften auf der Wiederholbarkeit von Experimenten basieren.

Es gibt aber Experimente, bei denen eine Unsicherheit über das Resultat besteht. Ob beispielsweise eine aufgeworfene Münze mit dem Kopf oder der Zahl nach oben landet, lässt sich mit unserem bisher vorhandenen Wissen nicht voraussehen. Solche mit einer Unsicherheit behafteten Experimente nennt man *Zufallsexperimente*, und die Menge aller möglichen Resultate eines Zufallsexperiments heisst *Ereignisraum* (oder Ereignismenge) Ω . Jedem Ereignis darin versucht man eine *Wahrscheinlichkeit* zuzuordnen.

1.2 Kombinatorik

Die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ereignisse kann man durch ein mathematisches Modell begründen. Kennt man die Anzahl $N(\Omega)$ aller möglichen Ereignisse und die Anzahl $N(A)$ der Möglichkeiten, die zum Ereignis A führen, so ist

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \quad (1)$$

die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A .

Beispiel:

Hat es in einer Urne acht weisse und zwei schwarze Kugeln, so gibt es zehn verschiedene Ereignisse für das Experiment, bei dem jemand blind eine Kugel aus der Urne zieht. In acht Fällen zieht man eine weisse und in zwei Fällen eine schwarze Kugel. Damit ist für das Ereignis $A = \text{“Ziehen einer schwarzen Kugel”}$ die Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{2}{2+8} = 0.2$.

Die Kombinatorik als Kunst des geschickten Zählens hilft die Grössen $N(\Omega)$ und $N(A)$ zu bestimmen. Das setzt aber voraus, dass alle Möglichkeiten, die zu $N(\Omega)$ führen, die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Sind im obigen Beispiel die schwarzen Kugeln leichter als die weissen, so sind sie eher oben in der Urne anzutreffen und werden so vermutlich häufiger gezogen, was die Wahrscheinlichkeiten beeinflusst.

1.3 Statistik

Kann man kein mathematisches Modell finden, mit dem sich die Wahrscheinlichkeiten begründen lassen, so gibt es eine zweite Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeiten für ein Ereignis A zu finden. Man macht eine grosse Anzahl Experimente und zeichnet die Ereignisse auf, benutzt also die Methoden der Statistik, um die Häufigkeiten zu bestimmen. Die relativen Häufigkeiten entsprechen den Wahrscheinlichkeiten, denn

nach dem *Gesetz der grossen Zahlen*, das hier nur erwähnt, nicht aber mathematisch sauber eingeführt wird, nähern sich die relativen Häufigkeiten den Wahrscheinlichkeiten an, wenn man genügend viele Experimente macht.

Beispiel:

Lässt man einen Reissnagel aus einer genügenden Höhe auf den Boden fallen, so kann er entweder auf dem Kopf wie links in der nebenstehenden Abbildung oder auf dem Fuss wie rechts in der Abbildung landen. Wirft man den Reissnagel genügend oft, stellen sich die stabilen relativen Häufigkeiten $P(\text{Kopf}) = 0.625$ und $P(\text{Fuss}) = 0.375$ ein.



2 Einfache Zufallsexperimente

2.1 Wahrscheinlichkeitsraum

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse genannten Elemente ω im Ereignisraum Ω gegeben sind, und stellt die Frage, wie man die Wahrscheinlichkeiten für komplexere Ereignisse bestimmen kann. Dabei hilft die Mengenlehre, denn Ereignisse sind immer Teilmengen des Ereignisraumes Ω . Für das Elementarereignis $\omega \in \Omega$ schreibt man $A = \{\omega\}$.

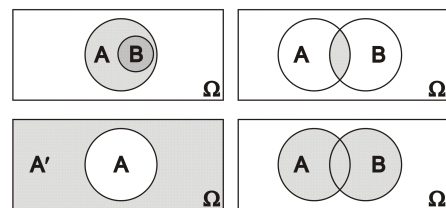
Beispiel:

Gegeben ist ein sechsseitiger Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6, und es wird angenommen, dass alle sechs Augenzahlen gleich wahrscheinlich sind. Identifiziert man die Elementarereignisse mit der Augenzahl, so ist der Ereignisraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und die Wahrscheinlichkeiten für jede der möglichen Augenzahlen bei einem einzelnen Wurf ist $\frac{1}{6}$ gemäss (1). Die Frage ist jetzt, welche Wahrscheinlichkeit beispielsweise das Ereignis "Die Augenzahl ist gerade" als zusammengesetztes Ereignis hat.

Ein (endlicher) *Wahrscheinlichkeitsraum* besteht aus einer (endlichen) Menge Ω von Elementarereignissen, aus allen Teilmengen davon als möglichen Ereignissen und aus einer Wahrscheinlichkeitsfunktion P , die jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet. Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion P gibt es gewisse Einschränkungen, die weiter unten besprochen werden.

2.2 Venn-Diagramme

Weil die Wahrscheinlichkeitsrechnung Konzepte der Mengenlehre benutzt, kann man *Venn-Diagramme* für die Darstellung von Ereignissen benutzen. In der nebenstehenden Abbildung sind vier Venn-Diagramme gezeigt. Das Diagramm oben links zeigt zwei Ereignisse A und B mit $B \subset A$, sodass jedesmal, wenn B eintritt, auch A eintritt. Das Diagramm unten links zeigt das zu A *entgegengesetzte* Ereignis A' , für das also $A \cup A' = \Omega$ und $A \cap A' = \emptyset$ gilt, und für das manchmal auch \bar{A} geschrieben wird.



Das Diagramm oben rechts zeigt das Ereignis $A \cap B$, das eintritt, wenn A und B eintritt, und das Diagramm unten rechts zeigt das Ereignis $A \cup B$, das eintritt, wenn A oder B eintritt. Daneben gibt es das *sichere* Ereignis S , das ganz Ω entspricht, und das *unmögliche* Ereignis U , das der leeren Menge \emptyset entspricht. Zwei Ereignisse gelten als *gleich*, wenn das eine immer dann eintritt, wenn das andere eintritt, und umgekehrt, wenn sie also dieselbe Teilmenge bedeuten.

Beispiel:

Beim Würfel mit sechs Seiten seien die Ereignisse $A = \{4, 5, 6\}$, das also dem Würfeln einer Augenzahl grösser gleich 4 entspricht, und $B = \{2, 4, 6\}$, das somit dem Würfeln einer geraden Augenzahl entspricht. Dann sind die Ereignisse $A \cap B = \{4, 6\}$, $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ und $A' = \{1, 2, 3\}$.

2.3 Wahrscheinlichkeiten

Weil die Wahrscheinlichkeiten gemäss (1) die relativen Häufigkeiten aus der Statistik sind, müssen sie immer zwischen 0 und 1 liegen und sich zu 1 aufsummieren. Zudem hat das sichere Ereignis die Wahr-

scheinlichkeit 1 und das unmögliche Ereignis die Wahrscheinlichkeit 0. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion hat also die folgenden Eigenschaften:

1. Die Wahrscheinlichkeiten liegen für alle Ereignisse A zwischen 0 und 1: $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Das sichere Ereignis S hat die Wahrscheinlichkeit 1: $P(S) = 1$.
3. Das unmögliche Ereignis U hat die Wahrscheinlichkeit 0: $P(U) = 0$.
4. Die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse summieren sich zu 1: $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$.

Beispiel:

Wirft man eine Münze, so landet sie entweder mit Kopf nach oben oder Zahl nach oben. (Dass sie theoretisch auch auf dem Rand landen und so stehen bleiben könnte, kann man vernachlässigen.) Es muss somit $P(\text{Kopf}) + P(\text{Zahl}) = 1$ gelten. Das sichere Ereignis ist, dass Kopf oder Zahl kommt, während das unmögliche Ereignis ist, dass weder Kopf noch Zahl kommt.

2.4 Additionssatz

Wenn sich zwei Ereignisse A und B gegenseitig ausschliessen, so können für die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B passiert, die Wahrscheinlichkeiten von A und B zusammengezählt werden. (Die Elementarereignisse schliessen sich gegenseitig aus und ihre Wahrscheinlichkeiten summieren sich zu 1.)

Beispiel:

Wenn jede Augenzahl bei einem Würfel mit sechs Seiten gleich wahrscheinlich ist, so ist die Wahrscheinlichkeit von $A = \{1\}$ gleich der Wahrscheinlichkeit von $B = \{2\}$, und es gilt $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$. Die Ereignisse A und B schliessen sich gegenseitig aus, weil bei einem Wurf nicht gleichzeitig die Augenzahl 1 und die Augenzahl 2 herauskommen kann. Für die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B = \{1, 2\}$ gilt also $P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Generell (also ohne die Voraussetzung, dass sich A und B gegenseitig ausschliessen) gilt der *Additionssatz*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (2)$$

für die Wahrscheinlichkeiten von beliebigen Ereignissen A und B . Schliessen sich A und B gegenseitig aus, so ist $P(A \cap B) = 0$, woraus der obige Spezialfall folgt. Aus $P(A \cap A') = 0$ und $P(A \cup A') = 1$ folgt zudem, $P(A) + P(A') = 1$ oder umgeformt $P(A') = 1 - P(A)$.

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

3.1 Zusätzliches Wissen durch Bedingungen

Sind A und B zwei Ereignisse im selben Ereignisraum, und ist $P(B) \neq 0$, so nennt man

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (3)$$

die *bedingte* Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B . Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von A unter der Bedingung, dass man weiss, dass B eingetroffen ist (und somit $P(B) \neq 0$ garantiert ist).

Beispiel:

Jemand würfelt mit einem sechsseitigen Würfel, ohne dass wir das Resultat kennen. Die Wahrscheinlichkeit für jede Augenzahl ist also $\frac{1}{6}$. Falls man uns sagt, dass die Augenzahl gerade ist, dass also $B = \{2, 4, 6\}$ ist, so wissen wir, dass für die Wahrscheinlichkeit von $A_1 = \{2\}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A_1|B) = \frac{1}{3}$ und für $A_2 = \{3\}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A_2|B) = 0$ wegen $P(B) = \frac{1}{2}$ und $P(A_1 \cap B) = \frac{1}{6}$ beziehungsweise $P(A_2 \cap B) = 0$ gilt.

Bedingungen geben also zusätzliches Wissen, was die Wahrscheinlichkeiten beeinflusst. Weil beispielsweise Rotgrünfarbenblindheit bei Männern viel häufiger vorkommt als bei Frauen, ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, dem wir zufällig auf der Strasse begegnen, von diesem Typus Farbenblindheit betroffen ist, abhängig davon, ob diese Person männlich oder weiblich ist.

3.2 Stochastische Unabhängigkeit

In gewissen Fällen ist die Wahrscheinlichkeit von $P(A|B)$ gleich gross wie $P(A)$, sodass das zusätzliche Wissen, dass B zutrifft, nichts über die Wahrscheinlichkeit von A aussagt. Die Ereignisse A und B nennt man *unabhängig* (oder stochastisch unabhängig), falls

$$P(A|B) = P(A) \quad (4)$$

gilt. Unabhängige Ereignisse üben keinen Einfluss aufeinander aus. Wenn jemand anfangs Woche die Filme im Fernsehprogrammheft anstreicht, die er anschauen will, und diese Filme dann auch immer anschaut, so hat das Wetter keinen Einfluss auf das Fernsehverhalten dieser Person. Wenn jemand hingegen nur an sonnigen und warmen Abenden ein Stück Fleisch auf den Grill legt, so hat das Wetter einen Einfluss auf das Grillverhalten dieser Person, und die Nachbarn können bei schönem und warmem Wetter davon ausgehen, dass diese Person mit grösserer Wahrscheinlichkeit den Grill einfeuern wird als an regnerischen oder kühlen Abenden. Wetter und Fernsehverhalten sind in diesem Fall also unabhängig, während Wetter und Grillverhalten nicht unabhängig sind.

Beispiel:

Würfelt man mit einem roten und grünen Würfel gleichzeitig, so kann man annehmen, dass sich die Würfel nicht gegenseitig beeinflussen und die beiden Augenzahlen somit unabhängig voneinander sind. Ist A das Ereignis, dass der rote Würfel die Augenzahl 3 würfelt und B das Ereignis, dass der grüne Würfel die Augenzahl 5 würfelt, so ist $P(A|B) = P(A) = \frac{1}{6}$.

3.3 Multiplikationssatz

Multipliziert man beide Seiten von (3) mit $P(B)$, so bekommt man $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$. Eigentlich gilt das nur, falls $P(B) \neq 0$ ist, weil sonst die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ nicht definiert ist. Im Fall von $P(B) = 0$ gilt aber auch $P(A \cap B) = 0$, sodass der *Multiplikationssatz*

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad (5)$$

als allgemein gültig betrachtet werden kann. Sind A und B stochastisch unabhängig, so gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (6)$$

wegen (4), sodass die Wahrscheinlichkeit vom Ereignis “ A und B ” in diesem Fall einfach gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten von A und B ist.

Beispiel:

Beim gleichzeitigen Würfeln mit einem roten und einem grünen Würfel ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der rote Würfel die Augenzahl 3 und der grüne Würfel die Augenzahl 5 würfelt, $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Stochastische Unabhängigkeit von A und B heisst nach (4) $P(A|B) = P(A)$. Diese Bedingung und die Bedingung (6) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ sind äquivalent. Weiter gilt symmetrisch $P(B|A) = P(B)$, $P(A|B') = P(A)$ und $P(B|A') = P(B)$, falls A und B stochastisch unabhängig sind.

4 Mehrstufige Zufallsexperimente

4.1 Mehrmaliges Ausführen eines Zufallsexperiments

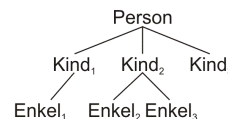
In den obigen Beispielen sind manchmal ein roter und ein grüner Würfel vorgekommen. Statt mit diesen beiden Würfeln gleichzeitig zu würfeln, kann man mit einem einzigen Würfel zweimal hintereinander würfeln und dabei den ersten Wurf dem roten Würfel und den zweiten Wurf dem grünen Würfel zuordnen. Generell kann man Zufallsexperimente mehrmals hintereinander (also mehrstufig) ausführen.

Beim zweimaligen Würfeln kann man davon ausgehen, dass sich die beiden Würfe nicht gegenseitig beeinflussen, und dass ihre Ergebnisse somit stochastisch unabhängig sind, denn die Augenzahl, die man beim zweiten Wurf bekommt, ist in keiner Weise davon abhängig, welche Augenzahl man beim ersten

Wurf bekommen hat. Eine Schwierigkeit bei psychologischen Experimenten ist, dass sie sich nicht mit denselben Personen wiederholen lassen, weil diese sich an das erste Experiment erinnern, sodass ein zweites Experiment vom ersten beeinflusst ist. Würfel haben jedoch kein Erinnerungsvermögen, sodass mehrmaliges Würfeln zu stochastisch unabhängigen Ergebnissen führt.

4.2 Baumstrukturen

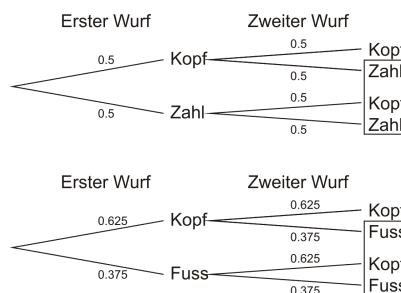
Stammbäume wie in der nebenstehenden Abbildung sind ein Beispiel von Baumstrukturen. Bei einem Baum im mathematischen Sinn gibt es einen obersten Knoten (hier “Person”) als Wurzel. Von diesem Knoten führen Kanten zur nächsten Generation (hier “Kind_{*i*}”) und weiter zur übernächsten Generation (hier “Enkel_{*i*}”). Von jedem Knoten (ausser von der Wurzel) führt genau eine Kante nach oben, können aber beliebig viele Kanten nach unten führen.



Bei einem Stammbaum wie in der Abbildung liegt die Wurzel – anders als bei realen Bäumen – oben, und die Äste wachsen nach unten. Bei einer anderen, botanisch realistischeren Form von Stammbäumen führen die Kanten als Äste von einer Person als Wurzel unten zu dessen Eltern, Grosseltern, Urgrosseltern und so weiter nach oben. Wie eine Baumstruktur liegt, hängt vom Problem ab. Bäume in der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben die Wurzel meist links, während die Äste nach rechts wachsen.

4.3 Baumdiagramme

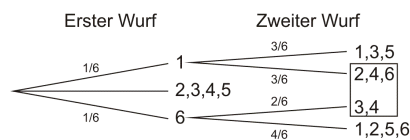
Mehrstufige Zufallsexperimente lassen sich durch Baumdiagramme genannte Baumstrukturen darstellen, wobei der Additionssatz (2) und der Multiplikationssatz (5) beim Bestimmen der Wahrscheinlichkeiten helfen. Die nebenstehende Abbildung zeigt zwei Beispiele. Im oberen Beispiel ist eine Münze und im unteren Beispiel ein Reissnagel zweimal geworfen worden. In beiden Fällen ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, nicht zweimal Kopf zu bekommen. Die gesuchten Fälle sind durch ein Rechteck markiert.



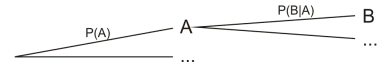
Die Wahrscheinlichkeiten für den ersten und den zweiten Wurf können multipliziert werden, weil sie als stochastisch unabhängig betrachtet werden. Die Wahrscheinlichkeit für Kopf im ersten und Zahl im zweiten Wurf beim Doppelwurf mit Münzen ist also $0.5 \cdot 0.5 = 0.25$. Die gleiche Wahrscheinlichkeit bekommt man für erst Zahl und anschliessend Kopf oder für erst Zahl und anschliessend wieder Zahl. Jede der markierten Möglichkeiten hat also die Wahrscheinlichkeit 0.25. Weil sie sich ausschliessen, dürfen sie addiert werden, sodass die Wahrscheinlichkeit dafür, nicht zweimal Kopf zu bekommen, gleich $0.25 + 0.25 + 0.25 = 0.75$ ist.

Beim Doppelwurf mit einem Reissnagel, sind die Wahrscheinlichkeiten für Kopf und Fuss nicht gleich. Für erst Kopf und dann Fuss bekommt man die Wahrscheinlichkeit $0.625 \cdot 0.375 = 0.234375$. Die Wahrscheinlichkeit für erst Fuss und dann Kopf ist $0.375 \cdot 0.625 = 0.234375$ und für erst Fuss und dann nochmals Fuss ist $0.375 \cdot 0.375 = 0.140625$, was zusammen die Wahrscheinlichkeit 0.609375 gibt. Die beiden Ergebnisse hätte man offensichtlich auch einfacher bekommen können, weil die gesuchte Wahrscheinlichkeit $1 - P(\text{Kopf}, \text{Kopf})$ ist. Für den Doppelwurf mit einer Münze gibt das $1 - 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$ und für den Doppelwurf mit dem Reissnagel gibt das $1 - 0.625 \cdot 0.625 = 0.609375$.

Die nebenstehende Abbildung zeigt ein anderes Beispiel. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, entweder erst die Augenzahl 1 und anschliessend eine gerade Augenzahl zu würfeln oder erst die Augenzahl 6 und anschliessend die Augenzahl 3 oder 4 zu würfeln. Um das Baumdiagramm nicht unnötig zu verkomplizieren, sind geeignete Augenzahlen und ihre Wahrscheinlichkeiten (mit dem Additionssatz) zusammengefasst worden. Die Wahrscheinlichkeit, erst eine 1 und anschliessend eine gerade Augenzahl zu würfeln, ist $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$, und die Wahrscheinlichkeit, erst eine 6 und anschliessend die Augenzahl 3 oder 4 zu würfeln, ist $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18}$, sodass die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{5}{36}$ ist.



Nach Multiplikationssatz gilt für zwei Ereignisse A und B , die wie in der nebenstehenden Abbildung benachbarte Knoten auf einem Pfad sind, dass die Kante von A nach B die Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ hat. In den obigen Beispielen waren A und B unabhängig, sodass $P(B|A)$ nach (4) durch $P(B)$ ersetzt werden darf. Baumdiagramme sind speziell dann nützlich, wenn Ereignisse nicht unabhängig sind.



5 Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

5.1 Kreuzen von Pflanzen und radioaktive Zerfälle

Mendel hat beim Kreuzen von Erbsen mit gelben und grünen Samen einen statistischen Zusammenhang festgestellt, der sich einfacher am Beispiel der rot- und weissblühenden Löwenmäulchen beschreiben lässt, weil keine dieser beiden Erbanlagen dominiert. Rein rotblühende Löwenmäulchen haben die Erbanlagen rr , während rein weissblühende die Erbanlagen ww haben. Kreuzt man diese Pflanzen, so haben in der ersten gekreuzten Generation all Pflanzen hellrote Blüten, was der Erbanlage rw oder wr entspricht. In der zweiten gekreuzten Generation haben aber je ein Viertel der Pflanzen rote beziehungsweise weisse Blüten, während die andere Hälfte hellrote Blüten hat. Das entspricht je einem Viertel mit rr , ww , rw und wr als Erbanlage und damit der Wahrscheinlichkeit von je 0.25, wobei aber rw und wr gleich sind.

Radioaktive Substanzen zerfallen gemäss dem exponentiellen Gesetz $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, wobei N_0 die Anzahl Atome beim Beginn der Messung, $N(t)$ die Anzahl Atome zur Zeit t und λ die materialabhängige Zerfallskonstante ist. (Es sei angenommen, die Substanz sei rein und bestehe somit nur aus Atomen desselben Isotops.) Für die Halbwertszeit $t_{1/2}$ folgt aus $N(t_{1/2}) = N_0 \cdot e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} N_0$ der Zusammenhang $\lambda \cdot t_{1/2} = \ln 2$ mit der Zerfallskonstante. Weil in der Zeit $t_{1/2}$ die Hälfte der Atome zerfällt, ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, dass ein Atom in der Zeit $t_{1/2}$ zerfällt, und weil $\frac{d}{dt} N(t) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N(t)$ gilt, hat es $\Delta N = \lambda N \Delta t$ Atome nach dem extrem kurzen Zeitabschnitt Δt weniger, sodass die Wahrscheinlichkeit für ein Atom, in diesem Zeitabschnitt zu zerfallen, nach (1) $\frac{\Delta N}{N} = \lambda \Delta t$ ist.

5.2 Testen von Hypothesen

Bei einem Lampengeschäft trifft eine bestellte Sendung von 50 000 Glühbirnen ein. Der Lieferant garantiert, dass höchstens 1% defekt ist. Der Manager des Lampengeschäfts, möchte sicherstellen, dass das stimmt. Die Behauptung, dass höchstens 1% der Lampen defekt ist, nennt man die *Nullhypothese* H_0 . (In diesem Fall könnte man mit grossem zeitlichem Aufwand sämtliche Glühbirnen testen und somit die Nullhypothese zweifelsfrei bestätigen oder widerlegen. In anderen Fällen ist das aber nicht sinnvoll, denn bei einer Ladung Feuerwerkskörper für den Silvester beispielsweise zerstört man mit jedem Test einen Feuerwerkskörper, sodass man mit möglichst wenig Tests auskommen und sicher nicht sämtliche Feuerwerkskörper testen möchte.) Der Manager des Lampengeschäfts will nicht die ganze Ladung testen und stellt die *Gegenhypothese* H_1 auf, dass mehr als 1% der Glühbirnen defekt ist. Er wählt eine *Testgrösse* Z und einen *Verwerfungsbereich* V . Die Testgrösse könnte sein, dass 100 Glühbirnen getestet werden, und ein Verwerfungsbereich wäre sinnvollerweise etwa, dass bei mehr als zwei defekte Glühbirnen H_1 als zutreffend betrachtet und somit H_0 verworfen wird. Es gibt folgende vier Möglichkeiten:

1. Man findet zwei oder weniger defekte Glühbirnen in den hundert zufällig gewählten Testobjekten und entscheidet richtig, dass die Sendung in Ordnung ist.
2. Man findet zwei oder weniger defekte Glühbirnen in den hundert zufällig gewählten Testobjekten und entscheidet fälschlicherweise, dass die Sendung in Ordnung ist.
3. Man findet mehr als zwei defekte Glühbirnen in den hundert zufällig gewählten Testobjekten und entscheidet fälschlicherweise, dass die Sendung nicht in Ordnung ist.
4. Man findet mehr als zwei defekte Glühbirnen in den hundert zufällig gewählten Testobjekten und entscheidet richtig, dass die Sendung nicht in Ordnung ist.

Es gibt also zwei mögliche Fehler. Man findet mehr als zwei defekte Glühbirnen und entscheidet sich für H_1 , obwohl die Sendung nicht mehr als 1% defekte Glühbirnen enthält (Fehler erster Art), oder man findet nur zwei oder weniger defekte Glühbirnen und entscheidet sich für die Richtigkeit von H_0 , obwohl die Sendung mehr als 1% defekte Glühbirnen enthält (Fehler zweiter Art).