Vektorrechnung II

Rainer Hauser

September 2011

1 Einleitung

1.1 Orthonormalbasis

In einem Vektorraum mit der Dimension n kann man n linear unabhängige Vektoren finden. Eine Menge von n linear unabhängigen Vektoren in einem n-dimensionalen Vektorraum bildet eine Basis. Mit einer gewählten Basis kann jeder Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + ... + \lambda_n \cdot \vec{e}_n$ dargestellt werden. Die Zahlen λ_i sind eindeutig, und man nennt sie die *Koordinaten* des Vektors.

Haben alle Basisvektoren die Länge 1 und stehen sie paarweise senkrecht aufeinander, so nennt man die Basis *orthonormiert* oder *orthonormal*. Im Folgenden ist angenommen, dass die gewählte Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ in der Ebene beziehungsweise $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, im Raum eine Orthonormalbasis ist.

1.2 Skalarprodukt

Das *Skalarprodukt* von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist als Länge der Projektion des einen Vektors auf den anderen eine skalare Grösse. Definiert ist das Skalarprodukt durch $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist. Offensichtlich gilt $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ und $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Zwei Vektoren stehen *senkrecht* aufeinander, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist. Steht ein Vektor $\vec{b}$ senkrecht auf einem Vektor $\vec{a}$, so nennt man den Vektor $\vec{b}$ *Normalenvektor* zum Vektor $\vec{a}$. Ist der Vektor $\vec{b}$ ein Normalenvektor zum Vektor $\vec{a}$ ist natürlich umgekehrt auch der Vektor $\vec{a}$ ein Normalenvektor zum Vektor $\vec{b}$. Der Nullvektor steht senkrecht auf jedem Vektor.

2 Normalenvektoren

2.1 Normalenvektor zu einem Vektor in der Ebene

In der Ebene lässt sich leicht zu jedem Vektor $\vec{v}$ ein Normalenvektor $\vec{n}$ mit Länge ungleich 0 finden. Um die Koordinaten von $\vec{n}$ zu bekommen, vertauscht man die Koordinaten von $\vec{v}$ und ändert bei der einen Koordinaten das Vorzeichen. Die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ stehen senkrecht aufeinander.

Alle Normalenvektoren zu $\vec{v}$ sind Vielfache von diesem $\vec{n}$, und alle Vielfachen von $\vec{n}$ sind auch Normalenvektoren zu $\vec{v}$. Das heisst, alle Normalenvektoren zu einem gegebenen Vektor sind kollinear. Das folgt sofort aus $\vec{v} \cdot (r\vec{n}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} rv_2 \\ -rv_1 \end{pmatrix} = rv_1v_2 - rv_1v_2 = r(v_1v_2 - v_1v_2) = 0$. Damit sind in der Ebene zwei Normalenvektoren zum gleichen Vektor immer linear abhängig.

Beispiel:
Die Vektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \end{pmatrix}$ sind alles Normalenvektoren zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Es gibt somit genau eine Richtung, die senkrecht auf einem gegebenen Vektor steht.

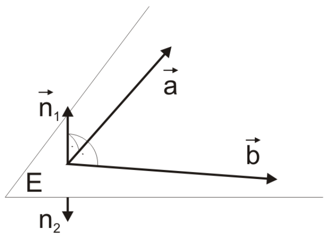
2.2 Normalenvektor zu einem Vektor oder zu zwei Vektoren im Raum

Im Raum können zwei Normalenvektoren zum gleichen Vektor linear unabhängig sein. Die Normalenvektoren zu einem Vektor liegen aber alle in einer Ebene und sind somit komplanar. Drei Normalenvektoren zum gleichen Vektor müssen aus diesem Grund immer linear abhängig sein.

Zwei linear unabhängige Vektoren im Raum spannen eine Ebene auf. Zu einer Ebene gibt es genau eine Richtung, die senkrecht auf allen Geraden in dieser Ebene steht. Zu zwei linear unabhängigen Vektoren im Raum gibt es somit eine eindeutig bestimmte Normalenrichtung, die durch einen Normalenvektor festgelegt werden kann.

2.3 Rechts- und Linkssysteme

Die Normalenrichtung zu zwei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist eindeutig festgelegt, es gibt aber zwei Vektoren der Länge 1, die diese Richtung bestimmen. Die nebenstehende Abbildung zeigt die beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ zur von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene E, wobei offensichtlich $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ gelten muss, wenn beide gleich lang sind.



Manchmal ist es wichtig, welchen Normalenvektor man wählt. Deshalb unterscheidet man zwischen so genannten Rechts- und Linkssystemen. Die drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ im Raum bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*, wenn man ihre Richtungen mit dem Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand anzeigen kann, wobei der Daumen in die Richtung von $\vec{a}$, der Zeigefinger in die Richtung von $\vec{b}$ und der Mittelfinger in die Richtung von $\vec{c}$ zeigt. Gelingt das nicht, so lassen sich die drei Vektoren auf diese Weise mit der linken Hand anzeigen und bilden deshalb ein *Linkssystem*. Drei linear unabhängige Vektoren bilden immer entweder ein Rechts- oder ein Linkssystem.

Ob drei linear unabhängige Vektoren ein Rechts- oder Linkssystem bilden, hängt offensichtlich von der Reihenfolge ab. Vertauscht man zwei Vektoren, wird aus einem Rechts- ein Linkssystem und umgekehrt. Bilden also drei Vektoren ein Rechtssystem und kann man eine andere Reihenfolge durch eine gerade Anzahl Vertauschungen erreichen, so bildet die drei Vektoren auch in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, während daraus durch eine ungerade Anzahl Vertauschungen ein Linkssystem wird.

In der Physik bilden die Geschwindigkeit $\vec{v}$, mit der sich ein geladenes Teilchen bewegt, das Magnetfeld $\vec{B}$, durch das es läuft, und die Lorentzkraft $\vec{F}_L$, die es ablenkt, ein Rechtssystem. Das liegt daran, dass die Richtung des Magnetfeldes entsprechend definiert worden ist. Hätte man das Magnetfeld so definiert, dass es von Süden nach Norden zeigt, würden die drei Vektoren ein Linkssystem bilden.

3 Vektorprodukt

3.1 Definition

Zu zwei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum gibt es einen Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ mit den Eigenschaften,

- dass $\vec{a}\times\vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$ steht,
- dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ ein Rechtssystem bilden, und
- dass $|\vec{a}\times\vec{b}|$ der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist,

und dieser Vektor ist eindeutig bestimmt. Der Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ heisst *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt*. Weil die Länge gerade die Fläche des aufgespannten Parallelogramms ist, muss

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi \tag{1}$$

gelten, wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Das Skalarprodukt ist in Vektorräumen mit beliebiger Dimension definiert, und das Resultat des Skalarprodukts von zwei Vektoren ist ein Skalar. Das Vektorprodukt hingegen ist nur im dreidimensionalen

Raum definiert, und das Resultat des Vektorprodukts von zwei Vektoren ist wieder ein Vektor. Zudem ist das Skalarprodukt kommutativ, sodass $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ gilt, während das Vektorprodukt antikommutativ ist, sodass $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ gilt . Das sind drei wesentliche Unterschiede zwischen dem Skalar- und dem Vektorprodukt.

Satz:
Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist genau dann $\vec{0}$, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind.

Satz:
Das Vektorprodukt ist distributiv, sodass $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ gilt.

3.2 Koordinatendarstellung

Um zu bestimmen, wie man das Vektorprodukt von zwei Vektoren berechnen kann, wenn man die Koordinaten der beiden Vektoren in einem Orthonormalsystem kennt, stellt man erst fest, dass für die Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ einerseits die Beziehungen $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$ und andererseits die Beziehungen $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ sowie die daraus durch Antikommutativität folgenden drei Beziehungen $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$ gelten.

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ und $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ gemäss Definition und unter Benutzung von $(r\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (r\vec{w}) = r(\vec{v} \times \vec{w})$ und dem Distributivgesetz kann man $\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$ in eine Summe von Summanden der Form $a_i\vec{e}_i \times b_j\vec{e}_j = a_ib_j(\vec{e}_i \times \vec{e}_j)$ umformen. Ist $i = j$, so verschwindet der Summand wegen $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$. Gilt aber $i \neq j$, so lassen sich zwei Summanden zusammenfassen, was beispielsweise für $i = 1$ und $j = 2$ zu $a_1b_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + a_2b_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) = a_1b_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) - a_2b_1(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = (a_1b_2 - a_2b_1)(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3$ führt. Fasst man sämtliche Summanden so zusammen, bekommt man $\vec{a} \times \vec{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2$, woraus

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

für die Koordinatendarstellung der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ folgt.

3.3 Anwendungen

Normalenvektor zu zwei linear unabhängigen Vektoren im Raum

Eine offensichtliche Anwendung des Vektorprodukts ist wegen seiner Definition das Bestimmen eines Normalenvektors zu zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dass $\vec{a} \times \vec{b}$ sowohl auf $\vec{a}$ wie auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht, kann man verifizieren, indem man das Skalarprodukt von $\vec{a} \times \vec{b}$ in Koordinaten gemäss (2) mit $\vec{a}$ beziehungsweise $\vec{b}$ berechnet und feststellt, dass sich sämtliche Summanden gegenseitig aufheben.

Ist ein Normalenvektor zu einer Ebene gesucht, so bestimmt man erst zwei linear unabhängige Vektoren und berechnet anschliessend ihr Vektorprodukt. Die Ebene kann beispielsweise durch die Koordinaten der Ecken eines nicht-degenerierten Dreiecks gegeben sein.

Flächenberechnungen im Raum

Weil die Länge des Vektorprodukts von zwei Vektoren gemäss (1) gleich der Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms ist, kann man das Vektorprodukt auch für Flächenberechnungen benützen. Die Fläche des aufgespannten Parallelogramms bekommt man direkt, während die Fläche eines Dreiecks als die Hälfte des entsprechenden Parallelogramms berechnet werden kann.

Ist die Fläche des nicht-degenerierten Dreiecks ABC gesucht, und sind die Ortsvektoren der Punkte A, B, C durch $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ gegeben, kann man zwei linear unabhängige Vektoren aus $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$,

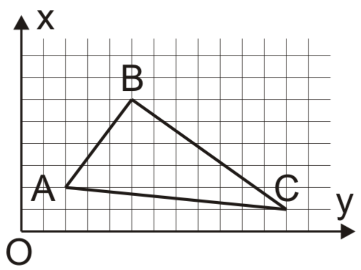
$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$ bestimmen und daraus das Vektorprodukt berechnen. Wählt man etwa $\overrightarrow{AC}$, so darf der zweite Vektor nicht $\overrightarrow{CA}$ sein, weil die beiden Vektoren linear abhängig sind, kann aber irgendeiner der anderen Vektoren sein. Wählt man als zweiten Vektor $\overrightarrow{CB}$, so ist die Fläche des Dreiecks $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CB}|$.

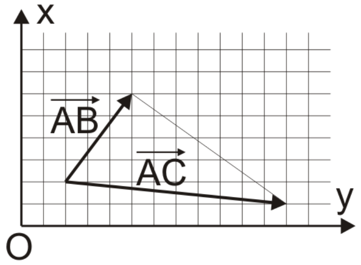
Beispiel

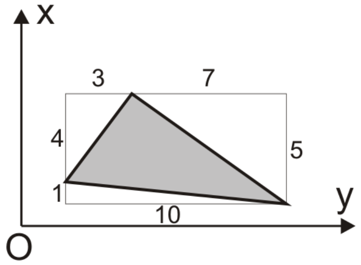
Die Punkte $A(2,1,7)$, $B(3,-1,2)$ und $C(4,0,3)$ bilden ein nicht-degeneriertes Dreieck und legen somit eine Ebene fest. Sucht man einen zu dieser Ebene senkrechten Vektor, so kann man erst aus $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ bestimmen und anschliessend mit $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ einen Normalenvektor zur Ebene finden. Die Fläche des von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannten Parallelogramms ist $\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{54} \approx 7.35$. Die Fläche des Dreiecks ABC ist also die Hälfte davon, was ungefähr 3.67 ist.

Flächenberechnungen in der Ebene

Das Vektorprodukt ist nur im Raum definiert, kann also in der Ebene nicht direkt für die Berechnung von Flächen benutzt werden. Weil man aber jede Ebene mit Koordinaten x, y im Raum einbetten kann, indem man die z-Koordinate mit $z = 0$ hinzufügt, lässt sich das Vektorprodukt auch für Flächenberechnungen in der Ebene einsetzen, wie am folgenden Beispiel gezeigt werden soll.







Die nebenstehende Abbildung zeigt oben das Dreieck ABC mit den Ecken $A(2,2)$, $B(5,6)$ und $C(12,1)$ in der x-y-Ebene, dessen Fläche gesucht ist. Die in der mittleren Abbildung gezeigten Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ haben die Koordinaten $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$, wie man direkt ablesen kann. Fügt man diesen Vektoren eine z-Komponente mit $z = 0$ hinzu, so kann man das Vektorprodukt

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -43 \end{pmatrix}$$

berechnen, dessen Länge 43 ist. Die Fläche des von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannten Parallelogramms ist also 43 und die Fläche des Dreiecks ABC somit die Hälfte, also $\frac{43}{2}$. Das Ergebnis kann man wie in der Abbildung unten gezeigt nachprüfen. Das Dreieck liegt im Rechteck mit der Fläche 50. Schneidet man die drei rechtwinkligen Dreiecke oben links, oben rechts und unten mit den Flächen 6, $\frac{35}{2}$ und 5 weg, bleibt die Fläche des Dreiecks ABC übrig.

Das Beispiel lässt sich verallgemeinern. Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gegeben, und ist die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms beziehungsweise Dreiecks gesucht, so kann man das Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

und dessen Länge $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ bestimmen. Das ist die Fläche des aufgespannten Parallelogramms und somit das Doppelte der Dreiecksfläche.