# Vektorrechnung I

Rainer Hauser

Juni 2011

# 1 Einleitung

## 1.1 Skalare und vektorielle Grössen

Gewisse physikalische Grössen wie die Zeit und die Temperatur lassen sich als Zahlen angeben. Man bezeichnet eine durch einen Zahlenwert bestimmte Grösse als *Skalar*. Andere physikalische Grössen wie Kräfte und Geschwindigkeiten haben zusätzlich eine Richtung. Man nennt so eine Grösse einen *Vektor*.

Vektoren werden häufig als Pfeile dargestellt. Ein Pfeil hat einen Anfangspunkt, eine Länge und eine Richtung. So wie Zahlen unabhängig vom Ort sind, sind auch Vektoren unabhängig vom Ort. Wenn beispielsweise zwei Radfahrer bei einem Rennen zu einem gewissen Zeitpunkt in genau derselben Richtung fahren und dieselbe Momentangeschwindigkeit haben, so betrachtet man ihre Geschwindigkeitsvektoren zu diesem Zeitpunkt als gleich. Der Anfangspunkt ist somit irrelevant, und nur die Länge und die Richtung bestimmen einen Vektor.

## 1.2 Rechnen mit Pfeile

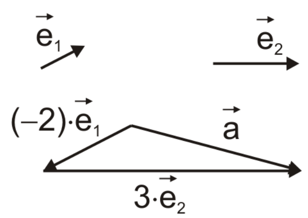
Mit Vektoren, die durch *Pfeile* dargestellt sind, kann man rechnen. Ist $\vec{a}$ ein Vektor, so hat der Vektor $2 \cdot \vec{a}$ die gleiche Richtung wie $\vec{a}$, aber doppelte Länge, und hat der Vektor $(-1) \cdot \vec{a}$ dieselbe Länge wie $\vec{a}$, zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung.

Man kann Vektoren auch addieren. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren, so ist $\vec{a} + \vec{b}$ der Vektor, dessen Anfangspunkt mit dem Anfangspunkt von $\vec{a}$ zusammenfällt, und dessen Endpunkt mit dem Endpunkt von $\vec{b}$ zusammenfällt, nachdem man den Anfangspunkt von $\vec{b}$ auf den Endpunkt von $\vec{a}$ verschoben hat. Das Kräfteparallelogramm in der Physik basiert darauf.

# 2 Eigenschaften von Vektoren

## 2.1 Linearkombination

Kann man einen Vektor $\vec{a}$ aus den $n$ Vektoren $\vec{e}_1$, ..., $\vec{e}_n$ durch Zahlen $a_1$, ..., $a_n$ so zusammensetzen, dass $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + ... + a_n \cdot \vec{e}_n$ gilt, so nennt man den Vektor $\vec{a}$ eine *Linearkombination* der $\vec{e}_i$.




In der nebenstehenden Abbildung ist der Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ mit $a_1 = -2$ und $a_2 = 3$ dargestellt. Es gilt somit in diesem Beispiel $\vec{a} = (-2) \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2$.

Sind $n$ Vektoren gegeben, und lässt sich einer davon durch die $n - 1$ anderen Vektoren als Linearkombination darstellen, so nennt man die $n$ Vektoren *linear abhängig*. Lässt sich hingegen keiner durch die anderen als Linearkombination darstellen, so nennt man sie *linear unabhängig*. In der Ebene sind zwei Vektoren linear abhängig, wenn sie *kollinear* sind, oder anders ausgedrückt, wenn sie auf einer Geraden liegen. Ist der Winkel zwischen ihnen weder 0° noch 180°, sind sie linear unabhängig. Im Raum sind drei Vektoren linear abhängig, wenn sie *komplanar* sind, das heisst, in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Mit den Vektoren $\vec{a}_1$, ..., $\vec{a}_n$ kann man für gesuchte Zahlen $\lambda_1$, ..., $\lambda_n$ die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + ... + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0} \tag{1}$$

aufstellen, wobei $\vec{0}$ der *Nullvektor* ist, der die Länge 0 hat. Setzt man alle $\lambda_i = 0$, so ist die Gleichung (1) zwangsläufig erfüllt. Gibt es jedoch noch andere Lösungen, bei denen gewisse $\lambda_i \neq 0$ sind, so heisst das, dass man diejenigen $\vec{a}_i$, für die $\lambda_i \neq 0$ gilt, als Linearkombination der anderen darstellen kann, und dass diese $n$ Vektoren nicht linear unabhängig sind. Allgemein gilt, dass diese Vektoren genau dann linear unabhängig sind, wenn die Gleichung (1) nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ erfüllt ist.

### 2.2 Basis und Dimension

Sind die $n$ Vektoren $\vec{e}_i$, ..., $\vec{e}_n$ linear unabhängig, und kann kein weiterer Vektor $\vec{e}_{n+1}$ gefunden werden, sodass die $n+1$ Vektoren immer noch linear unabhängig sind, so bilden die $n$ Vektoren $\vec{e}_i$, ..., $\vec{e}_n$ eine *Basis*. In der Ebene bilden zwei nicht kollineare Vektoren eine Basis, und im Raum bilden drei nicht komplanare Vektoren eine Basis. Eine Basis ist also die grösstmögliche Menge von linear unabhängigen Vektoren.

Weil die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren nicht von der Wahl der Vektoren abhängt, enthält eine Basis in einem fest vorgegebenen Vektorraum immer die gleiche Anzahl Vektoren. Diese Zahl nennt man die *Dimension* des Vektorraums. Eine Ebene ist somit zweidimensional, denn zwei beliebige, linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis, und der Raum ist folglich dreidimensional, denn drei beliebige, linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis.

Sind zwei Vektoren kollinear, kann man das Verhältnis ihrer Längen bestimmen. Vektoren haben aber per se keine Länge. Ordnet man Vektoren eine Länge zu und Paaren von Vektoren einen Winkel, so kann man eine Basis wählen, in der jeder Basisvektor die Länge 1 hat, und die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Eine solche Basis heisst *Orthonormalbasis*. Definiert man beispielsweise einen Meter als Länge 1, kann man mit den drei Kanten in einer Ecke eines Schulzimmers eine solche Basis festlegen.

## 3 Koordinatendarstellung

### 3.1 Vektoren in Koordinaten

Bilden $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ in der Ebene beziehungsweise $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ im Raum eine Basis, so kann jeder Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden. Es gibt somit drei Zahlen $a_1$, $a_2$ und $a_3$ für einen Vektor $\vec{a}$ im Raum, sodass $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$ gilt. In der Ebene gibt es analog für den Vektor $\vec{a}$ zwei Zahlen $a_1$ und $a_2$ mit $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$. Diese Zahlen heissen *Koordinaten* und sind eindeutig bestimmt.

Hat man eine Basis fest gewählt, repräsentieren die Zahlen $a_1$, $a_2$ und $a_3$ im Raum beziehungsweise die Zahlen $a_1$ und $a_2$ in der Ebene den Vektor $\vec{a}$, und man schreibt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

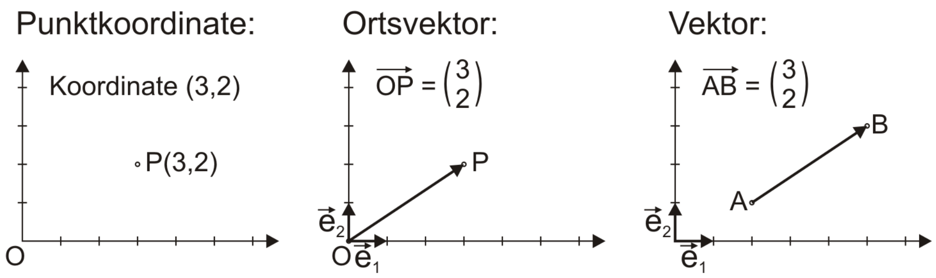
in Koordinatendarstellung.

Beispiele im Raum:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

### 3.2 Punkte im Koordinatensystem

Eine Ebene als Vektorraum und ein zweidimensionales Koordinatensystem haben gewisse Gemeinsamkeiten. Die folgende Abbildung zeigt den Zusammenhang zwischen einem Punkt im Koordinatensystem und dem Vektor mit den gleichen Koordinaten. Auf der linken Seite ist der Punkt $P(3,2)$ mit den Koordinaten $(3,2)$ eingetragen. Der Vektor $\overrightarrow{OP}$ in der Mitte ist der Vektor, der bei $O$ beginnt und bei $P$ endet, und wird deshalb Ortsvektor des Punktes $P$ genannt. Weil Vektoren aber unabhängig vom Anfangspunkt sind, müssen die Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{AB}$ gleich sein.




Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ des Punktes $P$ führt vom Ursprung $O$ des Koordinatensystems zum Punkt $P$. In Koordinatendarstellung hat er dieselben Koordinaten wie der Punkt $P$, aber anders geschrieben. Kennt man die zwei Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$, kann man aus $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ den Vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ bestimmen.

## 3.3 Rechnen in der Koordinatendarstellung

Weil Vektoren das Kommutativgesetz $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, das Assoziativgesetz $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ und das Distributivgesetz $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a} = (\lambda + \mu) \cdot \vec{a}$ erfüllen, gelten für beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum sowie beliebige Zahlen $r \in \mathbb{R}$ die Gesetze

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \qquad r \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

für das Rechnen in Koordinaten. Die Gültigkeit dieser Gesetze kann man durch $\vec{a} + \vec{b} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 + b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + b_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 + b_3 \cdot \vec{e}_3 = (a_1 + b_1) \cdot \vec{e}_1 + (a_2 + b_2) \cdot \vec{e}_2 + (a_3 + b_3) \cdot \vec{e}_3$ beweisen. Für Vektoren in der Ebene gelten analoge Gesetze.

## 3.4 Lineare Unabhängigkeit in Koordinaten

Das Bestimmen der linearen Unabhängigkeit einer Anzahl Vektoren in der Koordinatendarstellung (2) führt zu einem Gleichungssystem. Die Gleichung (1) für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in einer Ebene wird zu $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \vec{0}$ beziehungsweise

$$\left| \begin{matrix} a_1 \lambda + b_1 \mu = 0 \\ a_2 \lambda + b_2 \mu = 0 \end{matrix} \right|$$

wenn man sie in Koordinaten schreibt und die Rechengesetze (3) anwendet.

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -30 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ -16 \end{pmatrix} \qquad \left| \begin{matrix} (-30)\lambda + 40\mu = 0 \\ 12\lambda - 16\mu = 0 \end{matrix} \right|$$

Das Gleichungssystem hat beispielsweise die Lösung $\lambda = 4$ und $\mu = 3$. Weil $\lambda = \mu = 0$ nicht die einzige Lösung ist, sind die beiden Vektoren linear abhängig.

Rechnen mit Vektoren in Koordinatendarstellung führt auch bei anderen Fragestellungen zu Gleichungssystemen. Sind beispielsweise die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{v}$ in Koordinaten gegeben, und will man $\vec{v}$ als Linearkombination $\vec{v} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$ ausdrücken, so ergibt das ein Gleichungssystem in den beiden Unbekannten $x$ und $y$, das in der Ebene genau eine Lösung hat, falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, und das im Raum genau eine Lösung hat, falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig, $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{v}$ aber linear abhängig sind.

# 4 Rechnen in Orthonormalbasen

## 4.1 Länge eines Vektors

Haben alle Basisvektoren die Länge 1 und stehen sie paarweise senkrecht aufeinander, so kann man die *Länge* eines beliebigen Vektors mit dem Satz von Pythagoras bestimmen. Jeder Vektor lässt sich in der Ebene als Rechteckdiagonale und im Raum als Raumdiagonale aus den Koordinaten berechnen. Die Länge des Vektors $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet und kann in der Koordinatendarstellung (2) durch

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad\qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{4}$$

berechnet werden.

In der Ebene können so genannte *Einheitsvektoren* mit der Länge 1 durch

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, wobei $\varphi$ der Winkel zwischen $\vec{e}_1$ und $\vec{a}$ ist.

Der *Abstand* der Punkte $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ mit den Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ ist die Länge

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

des Vektors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ gemäss (4).

## 4.2 Skalarprodukt

Das *Skalarprodukt* von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist als Länge der Projektion des einen Vektors auf den anderen eine skalare Grösse. Die Arbeit in der Physik ist eine Anwendung davon, weil nur die Kraftkomponente in der Bewegungsrichtung Arbeit verrichtet. Definiert ist das Skalarprodukt durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \tag{5}$$

wobei $\varphi$ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist. Offensichtlich gilt $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ und $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Das Skalarprodukt ist 0, wenn einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist. Es kann aber auch 0 sein, wenn $\cos\varphi = 0$ beziehungsweise $\varphi = 90°$ oder $\varphi = 270°$ ist. Deshalb definiert man, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *senkrecht* aufeinander stehen, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist.

Weil das Skalarprodukt das Kommutativgesetz $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, das Distributivgesetz $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ und das Assoziativgesetz $(r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r \cdot \vec{b}) = r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ erfüllt, gilt für $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$ und $\vec{b} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3$, dass $\vec{a} \cdot \vec{b}$ eine Summe von Komponenten $a_i \cdot \vec{e}_i \cdot b_j \cdot \vec{e}_j$ ist, die zu $(a_i \cdot b_j) \cdot (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$ umgeformt werden können. Weil die Basis eine Orthonormalbasis ist, gilt $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ für $i \neq j$ und $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$. Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{6}$$

für das Skalarprodukt in Koordinatendarstellung. Im Gegensatz zu den Rechengesetzen (3), die allgemein gelten, darf man das Skalarprodukt jedoch nur bei Orthonormalbasen anwenden.

Sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Koordinatendarstellung gegeben, kann man den *Winkel* $\varphi$ zwischen ihnen gemäss (5) durch

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) \tag{7}$$

bestimmen, indem man die Länge mit (4) und das Skalarprodukt mit (6) berechnet.

Ein Vektor $\vec{n}$ heisst *Normalenvektor* zum Vektor $\vec{a}$, wenn $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ gilt und $\vec{n}$ somit senkrecht auf $\vec{a}$ steht. Zu einem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gibt es unendlich viele Normalenvektoren, die im zweidimensionalen Fall auf derselben Geraden und im dreidimensionalen Fall in derselben Ebene liegen.