Vektoren für Messgrössen mit einer Richtung

Rainer Hauser

August 2014

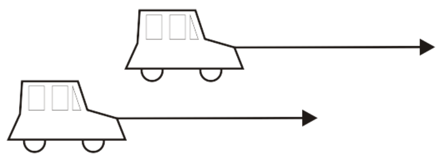
1 Vektoren als Pfeile

1.1 Messgrössen mit einer Richtung

In der Physik gibt es Messgrössen, die sich als einfache Zahlen darstellen lassen. Die Zeitdauer oder die Temperatur sind Beispiele für solche Messgrössen, die man als skalare Grössen oder als *Skalare* bezeichnet. Andere Messgrössen hingegen haben zusätzlich noch eine Richtung. Geschwindigkeiten und Kräfte etwa werden als solche Messgrössen betrachtet, die als vektorielle Grössen oder als *Vektoren* bezeichnet und durch Variablen mit einem Pfeil darüber wie etwa $\vec{v}$ repräsentiert werden.

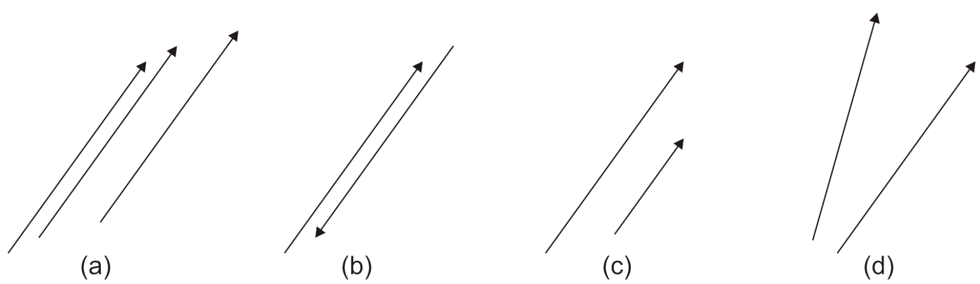
Wenn im Englischen die skalare Grösse der Geschwindigkeit, die man am Tachometer eines Autos ablesen kann, gemeint ist, spricht man von *speed*, während man die vektorielle Grösse der Geschwindigkeit, die neben der am Tachometer ablesbaren Geschwindigkeit noch eine Richtung hat, *velocity* nennt. Im Deutschen gibt es für diese beiden Grössen nur ein Wort.

Wenn in der nebenstehenden Abbildung zwei Autos mit gleicher am Tachometer ablesbaren Geschwindigkeit und in der gleichen Richtung fahren, so haben sie gemäss Physik die gleiche vektorielle Geschwindigkeit. Befinden sie sich auf einer Ebene wie etwa einem grossen Parkplatz, so bewegen sie sich auf parallelen Bahnen, solange sie die gleiche Geschwindigkeit haben. Zwei parallele Vektoren werden also als gleich betrachtet.



1.2 Rechnen mit Pfeilen

Vektorielle Grösse stellt man häufig als Pfeile dar. Die Richtung ist die Richtung des Pfeiles, und der Zahlenwert bestimmt sich aus der Länge des Pfeiles. Stellt beispielsweise ein Pfeil der Länge 5 cm die Geschwindigkeit 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ dar, so bedeutet ein doppelt so langer Pfeil in der entgegengesetzten Richtung folglich die Geschwindigkeit 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in der entgegengesetzten Richtung.



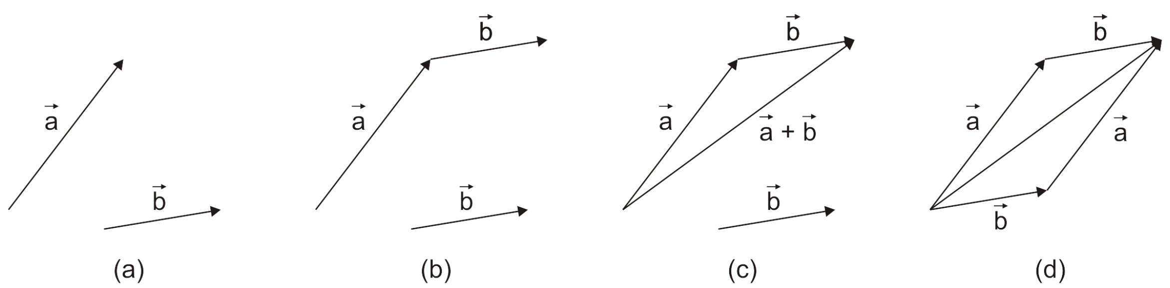
In der obigen Abbildung sind vier verschiedene Situationen dargestellt. In (a) sind drei gleich lange und in die gleiche Richtung zeigende Pfeile gezeigt, die somit alle denselben Vektor $\vec{v}$ bedeuten. In (b) haben die beiden Pfeile die gleiche Länge, zeigen aber in entgegengesetzte Richtung, sodass der rechte Pfeil als $-\vec{v}$

bezeichnet werden kann, wenn der linke Pfeil $\vec{v}$ heisst. Die beiden Pfeile in (c) haben die gleiche Richtung, der linke Vektor $\vec{v}$ ist aber doppelt so lang wie der rechte Vektor $\vec{w}$, sodass dafür $\vec{w} = 0.5 \cdot \vec{v}$ geschrieben werden kann. In (d) sind die beiden Pfeile gleich lang, zeigen aber in verschiedene Richtungen.

Mit Pfeilen kann man also insofern rechnen, als man Pfeile mit einem Skalar, also mit einer Zahl, multiplizieren kann. Die obige Abbildung enthält in (b) ein Beispiel, bei dem ein Vektor mit -1 multipliziert wurde, sodass aus dem Vektor $\vec{v}$ der Vektor $-\vec{v}$ mit gleicher Länge aber entgegengesetzter Richtung entstand, und in (c) ein Beispiel, bei dem ein Vektor mit 0.5 multipliziert wurde, sodass aus dem Vektor $\vec{v}$ der Vektor $0.5 \cdot \vec{v}$ mit gleicher Richtung aber halber Länge entstand.

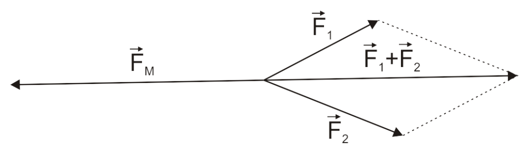
1.3 Addition und Subtraktion von Pfeilen

Sind zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Pfeile wie in (a) der Abbildung unten gegeben, ist ihre Addition auf folgende Art definiert. Weil Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung als der gleiche Vektor angesehen werden, darf der Vektor $\vec{b}$ wie in (b) gezeigt parallel so verschoben werden, dass sein Ende mit der Spitze von $\vec{a}$ zusammenfällt. Der in (c) gezeigte Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ ist als der Pfeil definiert, der vom Ende von $\vec{a}$ zur Spitze von $\vec{b}$ führt, nachdem $\vec{b}$ so verschoben worden ist. In (d) ist gezeigt, dass $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ gilt, weil die Addition in beiden Fällen zur gleichen Diagonale im entstehenden Parallelogramm führt.



Die so definierte Addition von Pfeilen erfüllt nicht nur das Kommutativgesetz, sondern auch das Assoziativgesetz, wie man leicht zeigen kann. Zudem gilt für alle Vektoren $\vec{a} + \vec{a} = 2 \cdot \vec{a}$, was die Addition mit der oben eingeführten Multiplikation mit einem Skalar auf erwartete Weise verbindet. Die Subtraktion $\vec{a} - \vec{b}$ lässt sich durch die Identität $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ auf die Addition und auf $-\vec{b} = (-1) \cdot \vec{b}$ zurückführen, wobei die Multiplikation mit einer negativen Zahl die Richtung des Pfeils umkehrt. Weil $\vec{a} - \vec{a}$ zu einem Pfeil der Länge 0 wird, der somit auch keine Richtung mehr hat, definiert man den so genannten *Nullvektor* als Pfeil ohne Länge und ohne Richtung und schreibt dafür $\vec{0}$.

1.4 Anwendung auf Kräfte und Geschwindigkeiten



Mit welcher Kraft $\vec{F}_M$ muss ein Mensch wie in der nebenstehenden Abbildung ziehen, damit er ruhig stehen bleibt, wenn zwei Hunde mit den Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ an den Hundeleinen zerren? Weil Kräfte gemäss Physik Vektoren sind, addieren sich die beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zu $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Für die Person, die an den beiden Hundeleinen zieht, kommt es somit nicht darauf an, ob zwei Hunde mit den Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zerren, oder ob ein Hund allein mit der Kraft $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ zerrt. Um die Kräfte der Hunde zu kompensieren, muss der Mensch also mit einer Kraft ziehen, die gleich lang wie $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ist, aber in der entgegengesetzten Richtung zeigt. Dafür schreibt man $\vec{F}_M + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ oder $\vec{F}_M = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$.

Fährt ein Boot mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_B$ über einen Fluss, der mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_F$ fliesst, so wird es vom fliessenden Fluss mitgeführt. Für einen Beobachter, der am Ufer steht, sieht es so aus, als fahre das Boot mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_B + \vec{v}_F$. Will der Kapitän des Bootes somit senkrecht zur Flussrichtung ans andere Ufer kommen, kann er nicht direkt auf das Ziel lossteuern, sondern muss so fahren, als wolle er einen Punkt oberhalb des eigentlichen Ziels anpeilen.

2 Zusammensetzen und Aufteilen von Vektoren

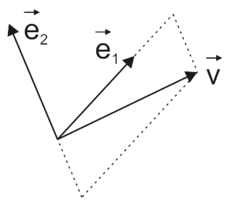
2.1 Kollineare und komplanare Vektoren

Alle Vektoren ausser dem Nullvektor definieren mit ihrer Richtung eine unendliche Schar von parallelen Geraden. Haben zwei Vektoren unabhängig von ihrer Länge die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung, definieren sie die gleiche Schar von parallelen Geraden. Deshalb nennt man zwei Vektoren, die in die gleiche Richtung oder in die entgegengesetzte Richtung zeigen, *kollinear*.

Zwei Vektoren, die nicht kollinear sind, definieren mit ihren beiden Richtungen eine unendliche Schar von parallelen Ebenen. Nimmt man einen dritten Vektor so dazu, dass entweder zwei dieser drei Vektoren kollinear sind, oder dass die von je zwei dieser Vektoren aufgespannten Scharen von parallelen Ebenen untereinander gleich sind, so nennt man die drei Vektoren *komplanar*.

2.2 Linearkombination, Basis und Dimension

Sind zwei Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ gegeben, so nennt man einen Vektor $\vec{v} = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2$ eine *Linearkombination* der beiden Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$, und sind drei Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ gegeben, so nennt man analog einen Vektor $\vec{v} = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2 + c \cdot \vec{e}_3$ eine *Linearkombination* der drei Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$. Dabei sind die Grössen a, b und c irgendwelche reellen Zahlen.



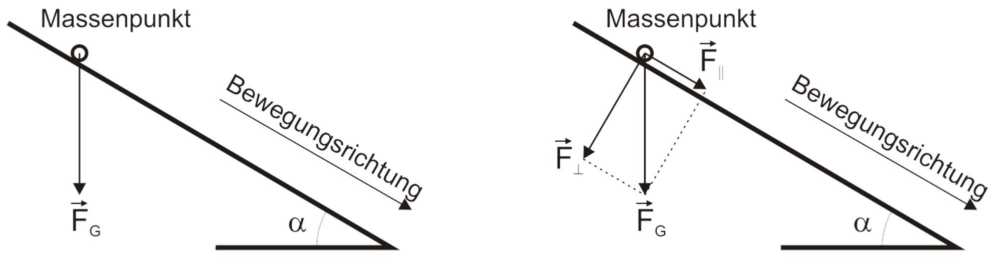
Sind in einer Ebene zwei Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$, die nicht kollinear sind, fest gegeben, so lässt sich jeder Vektor $\vec{v}$ in dieser Ebene eindeutig als Linearkombination dieser beiden Vektoren darstellen. In der nebenstehenden Abbildung sind die beiden Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ gegeben. Weil sie weder in die gleiche noch in die entgegengesetzte Richtung zeigen, sind sie nicht kollinear. Der Vektor $\vec{v}$ lässt sich als Linearkombination durch $\vec{v} = 1.5 \cdot \vec{e}_1 + (-0.5) \cdot \vec{e}_2 = 1.5 \cdot \vec{e}_1 - 0.5 \cdot \vec{e}_2$ bestimmen. Der Vektor $\vec{v}$ kann also als Summe in einen Vektor mit Richtung $\vec{e}_1$ und in einen Vektor mit Richtung $\vec{e}_2$ aufgespalten werden. Weil jeder Vektor in der Ebene als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ darstellbar ist, nennt man die beiden Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ eine *Basis*, und weil in der Ebene zwei nicht-kollineare Vektoren genügen, um eine Basis zu bilden, nennt man die Ebene *zweidimensional*.

Im Raum braucht es drei nicht-komplanare Vektoren für eine Basis. Sind also die drei Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ gegeben, und sind diese drei Vektoren nicht komplanar, so lässt sich jeder Vektor im Raum als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen. Der Raum ist deshalb *dreidimensional*. Die *Dimension* ist die Anzahl Vektoren, die es für eine Basis braucht.

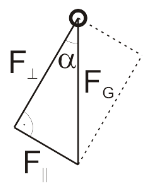
2.3 Aufteilen von Kräften in zwei Komponenten

Dass man einen Vektor in der Ebene in zwei Vektoren aufteilen kann, die in verschiedene Richtungen zeigen, wie man das machen muss, wenn man einen Vektor in eine Linearkombination von zwei Basisvektoren aufspalten will, lässt sich in der Physik ausnutzen. Eine häufige Anwendung ist, eine Kraft, die auf einen Massenpunkt wirkt, in eine Komponente in der Bewegungsrichtung und in eine Komponente senkrecht dazu zu zerlegen, falls die Bewegungsrichtung konstant ist. In einem Zeitabschnitt, in dem sich die Bewegungsrichtung nicht ändert, müssen sich die Kraftkomponenten senkrecht zur Bewegungsrichtung durch Vektoraddition aufheben, sodass nur die Komponenten in Bewegungsrichtung einen Einfluss auf die Bewegung des Massenpunktes haben.

Die Abbildung unten zeigt in (a) einen Massenpunkt, der sich auf einer um den Winkel α geneigten schiefen Ebene in der angegebenen Bewegungsrichtung bewegt, und auf den die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ wirkt. Weil aber nur ein Teil der Gewichtskraft den Massenpunkt in der Bewegungsrichtung zieht, während der andere Teil den Massenpunkt nur auf die schiefe Ebene drückt, möchte man diese beiden Teile der Gewichtskraft exakt bestimmen. Deshalb ist in (b) die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in eine Komponente $\vec{F}_{\parallel}$, die parallel zur Bewegungsrichtung zeigt und den Massenpunkt somit vorwärts zieht, und eine Komponente $\vec{F}_{\perp}$, die senkrecht zur Bewegungsrichtung zeigt und den Massenpunkt somit nur auf die Ebene drückt, zerlegt worden. Es gilt $\vec{F}_G = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$. Die übrigen Kräfte wie die Normalkraft und die Reibungskraft sind in diesem Beispiel weggelassen worden, um die Aufteilung einer Kraft in eine Komponente parallel und eine Komponente senkrecht zur Bewegungsrichtung nicht durch unnötige Nebensächlichkeiten zu verkomplizieren.



(a) (b)

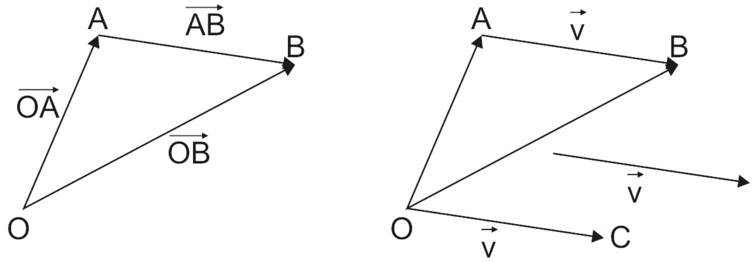


Die Abbildung oben zeigt die Richtung der beiden Komponenten $\vec{F}_{\|}$ und $\vec{F}_{\perp}$. Die Längen $F_{\|}$ und $F_{\perp}$ der beiden Komponenten lassen sich mit Hilfe der Trigonometrie aus der Länge F_G des Vektors $\vec{F}_G$ bestimmen, denn der Winkel zwischen $\vec{F}_G$ und $\vec{F}_{\|}$ ist $90° - \alpha$ und der Winkel zwischen $\vec{F}_G$ und $\vec{F}_{\perp}$ ist entsprechend α, wie man leicht zeigen kann. In der Abbildung rechts ist das rechtwinklige Dreieck gezeigt, dessen Hypotenuse F_G ist und dessen Katheten $F_{\|}$ und $F_{\perp}$ sind. Mit der Definition von Sinus und Cosinus aus den Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck folgt $F_{\|} = F_G \cdot \sin(\alpha)$ und $F_{\perp} = F_G \cdot \cos(\alpha)$ für die Länge der beiden Komponenten. Kennt man also den Winkel α der Steigung der schiefen Ebene und das Gewicht F_G des Massenpunktes, kann man die beiden Kraftkomponenten $F_{\|}$ und $F_{\perp}$ in der Bewegungsrichtung beziehungsweise senkrecht dazu berechnen. Ähnlich wie man die Zahl 56 in eine Zehnerkomponente 50 und eine Einerkomponente 6 aufteilen kann, sodass $56 = 50 + 6$ gilt, lässt sich also die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in eine Komponente $\vec{F}_{\|}$ parallel zu Bewegungsrichtung und eine Komponente $\vec{F}_{\perp}$ senkrecht zur Bewegungsrichtung aufteilen, sodass $\vec{F}_G = \vec{F}_{\|} + \vec{F}_{\perp}$ gilt.

Beispiel:
Auf einen 70 kg schweren Dachdecker, der auf einem Hausdach mit einer Steigung von 30° steht, wirkt also eine Kraft $F_{\|} = 70\,\text{kg} \cdot \sin(30°) = 70\,\text{kg} \cdot 0.5 = 35\,\text{kg}$ parallel zum Dach. Er braucht gute Schuhe, die auf dem Dach Halt geben, und die somit durch Reibung verhindern, dass er ins Rutschen kommt.

2.4 Ortsvektoren

Weil zwei Vektoren, die gleiche Länge und gleiche Richtung haben, als gleich gelten, so wie die Zahlen 0.5 und $\frac{1}{2}$ als gleich gelten, obwohl sie verschieden aussehen, eignen sie sich nicht, um Punkte in einer Ebene (oder im Raum) festzulegen. Möchte man aber trotzdem mit Punkten arbeiten, kann man so genannte *Ortsvektoren* benutzen. Dazu wird ein fester Punkt O festgelegt, der als Ursprungsort dient. Der Ortsvektor eines Punktes A ist definiert als der Vektor, der vom Punkt O zum Punkt A führt. Für den Ortsvektor des Punktes A wird $\overrightarrow{OA}$ geschrieben.



(a) (b)

In der oben stehenden Abbildung sind in (a) die zwei Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ sowie der daraus abgeleitete Vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ gezeigt. Liegt der Punkt C in (b) so, dass $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ gilt, so repräsentieren die drei eingezeichneten Vektoren $\vec{v}$ alle denselben Vektor, für den $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ gilt.