Terme und Gleichungen

Rainer Hauser

November 2010

1 Terme

1.1 Rekursive Definition der Terme

Welche Objekte *Terme* genannt werden, wird rekursiv definiert. Die rekursive Definition legt zuerst als Basis fest, welche Objekte einfache (atomare) Terme sind, und gibt anschliessend Produktionsregeln, mit denen man aus bereits gebildeten Termen kompliziertere (zusammengesetzte) Terme bilden kann.

Basis:
Zahlen (beispielsweise 0, 1, 5, 0.75, $\frac{1}{2}$) sind Terme, und *Variablen* (beispielsweise x, y, a, b) sind Terme.

Produktionsregeln:
Folgende *Regeln* erlauben es, aus Termen andere Terme zu bilden:

1. Sind T_1 und T_2 Terme, so sind auch
   - $(T_1) + (T_2)$
   - $(T_1) - (T_2)$
   - $(T_1) \cdot (T_2)$
   - $(T_1) \div (T_2)$
   - $(T_1)^{(T_2)}$

   Terme.
2. Ist T ein Term und a eine reelle Zahl mit $a > 0$ und $a \neq 1$, so ist auch $\log_a(T)$ ein Term.

Unnötige Klammern kann man weglassen, wobei die Konvention "Punkt vor Strich" gilt.

Beispiel:
Aus den beiden Termen x und $y - 1$ lässt sich beispielsweise der Term $(x) + (y - 1)$ bilden, für den man aber einfacher $x + (y - 1)$ oder wegen dem Assoziativgesetz sogar $x + y - 1$ schreibt.

1.2 Äquivalenz von Termen

Für Variablen in einem Term darf man Zahlen einsetzen, wobei aber für dieselbe Variable immer dieselbe Zahl eingesetzt werden muss.

Beispiel:
Setzt man für a den Wert 15.5 und für b den Wert $\frac{7}{4}$ im Term $2 \cdot b + (a - 4 \cdot b)$ ein, so erhält man den Term $2 \cdot \frac{7}{4} + (15.5 - 4 \cdot \frac{7}{4})$. Diesen Term kann man ausrechnen und bekommt 12 als Resultat der Einsetzung.

Definition:
Zwei Terme T_1 und T_2 sind *äquivalent*, wenn für jede mögliche Einsetzung in den Term $(T_1) - (T_2)$ das Resultat 0 ergibt.

Das ist keine sehr praktische Definition, denn man kann Äquivalenz so nicht überprüfen, weil es unendlich viele Zahlen gibt. Es braucht also eine praktikablere Prozedur um Äquivalenz festzustellen. Die gibt es in Form von mathematischen Gesetzen. Statt die Äquivalenz von T_1 und T_2 zu überprüfen, formt man T_1 so lange durch Einsetzen von Definitionen und Anwenden von gültigen mathematischen Gesetzen um, bis man T_2 bekommen hat. Ist das möglich, so sind die beiden Terme äquivalent. Ist das nicht möglich, so sind sie nicht äquivalent.

1.3 Termumformungen

Termumformungen haben die Form $T_1 = T_2 = T_3 = ...$, wobei T_{i+1} durch Einsetzen einer Definition oder durch Anwenden eines mathematischen Gesetzes aus T_i hervor geht. Das Gleichheitszeichen zwischen zwei Termen bedeutet, dass die beiden Terme für alle möglichen Einsetzungen dasselbe Resultat ergeben.

Beispiele:

1. $15a - 33b = 3 \cdot \big(5a - 11b\big)$ durch Ausklammern (also mit Hilfe des Distributivgesetzes)
2. $\big(\sqrt{2x-5}\big)^2 = 2x - 5$ wegen der Definition der Quadratwurzel
3. $\big(3a^2\big)^3 = 3^3 \cdot \big(a^2\big)^3 = 27a^{2\cdot 3} = 27a^6$ durch Anwendungen der Potenzgesetze
4. $\big(ab\big)^3 = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$ wegen der Definition der Potenzen

1.4 Mathematische Gesetze

Die folgenden Gesetze sind keine vollständige Aufzählung, geben aber einen Überblick über die wichtigsten mathematischen Gesetze, die bei Termumformungen häufig vorkommen:

- Kommutativgesetze:
  $(T_1) + (T_2) = (T_2) + (T_1)$ und $(T_1) \cdot (T_2) = (T_2) \cdot (T_1)$
- Assoziativgesetze:
  $((T_1) + (T_2)) + (T_3) = (T_1) + ((T_2) + (T_3))$ und $((T_1) \cdot (T_2)) \cdot (T_3) = (T_1) \cdot ((T_2) \cdot (T_3))$
- Distributivgesetze:
  $(T_1) \cdot ((T_2) + (T_3)) = ((T_1) \cdot (T_2)) + ((T_1) \cdot (T_3))$ und $((T_1) + (T_2)) \cdot (T_3) = ((T_1) \cdot (T_3)) + ((T_2) \cdot (T_3))$
- Negatives Vorzeichen und Minuszeichen:
  $-(T) = (-1) \cdot (T)$ und $(T_1) - (T_2) = (T_1) + (-(T_2))$
- Addition von Brüchen:
  $\frac{(T_1)}{(T_2)} + \frac{(T_3)}{(T_4)} = \frac{((T_1) \cdot (T_4)) + ((T_2) \cdot (T_3))}{(T_2) \cdot (T_4)}$
- Multiplikation und Division von Brüchen:
  $\frac{(T_1)}{(T_2)} \cdot \frac{(T_3)}{(T_4)} = \frac{(T_1) \cdot (T_3)}{(T_2) \cdot (T_4)}$ und $\frac{(T_1)}{(T_2)} \div \frac{(T_3)}{(T_4)} = \frac{(T_1) \cdot (T_4)}{(T_2) \cdot (T_2)}$
- Kürzen und Erweitern von Brüchen:
  $\frac{(T_1)}{(T_2)} = \frac{(T_1) \cdot (T_3)}{(T_2) \cdot (T_3)}$, falls $T_3 \neq 0$.
- Potenzgesetze:
  $(T_1)^{(T_2)} \cdot (T_1)^{(T_3)} = (T_1)^{((T_2)+(T_3))}$ und $((T_1)^{(T_2)})^{(T_3)} = (T_1)^{((T_2)\cdot(T_3))}$
- Logarithmusgesetze:
  $\log_a((T_1) \cdot (T_2)) = \log_a(T_1) + \log_a(T_2)$ und $\log_a((T_1)^{(T_2)}) = (T_2) \cdot \log_a(T_1)$

Bemerkung:
Beim Kürzen und Erweitern wird vorausgesetzt, dass $T_3 \neq 0$ gilt. Das lässt sich zwar nicht immer feststellen, aber man kann sich merken, wo Probleme auftauchen könnten:
Beim Erweiterungsschritt $\frac{(x+3)}{(2x-5)} = \frac{(x+3) \cdot (x-2)}{(2x-5) \cdot (x-2)}$ sollte man im Kopf behalten, dass $x \neq 2$ sein muss, damit $x - 2 \neq 0$ gilt.

Ein weiterer erlaubter und manchmal nützlicher Umformungsschritt:

- Faktorisieren:
  $ax^2 + bx + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ für $a \neq 0$ und $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Beispiel:
$\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} = \frac{(x+3) \cdot (x+2)}{x+3} = x + 2$, falls $x + 3 \neq 0$.

1.5 Aufgaben

Überlegen Sie sich beim Bearbeiten der folgenden Aufgaben, welche Definition oder welches mathematische Gesetz Sie anwenden.

Aufgabe 1

Vereinfachen Sie $\frac{15a+6}{10a+4} =$

Aufgabe 2

Vereinfachen Sie $\frac{15a+6}{a-2b} \cdot \frac{10b-5a}{10a+4} =$

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie $\frac{(15a+6)^2}{a-2b} \cdot \frac{10b-5a}{(10a+4)^2} =$

Aufgabe 4

Vereinfachen Sie $\frac{4x+12y}{x^3} \cdot \frac{(5x^3-2x^3)x}{3y+x} - 3x =$

Aufgabe 5

Vereinfachen Sie $\frac{25x^2-9}{(x+2)^2} \cdot \frac{x^2+5x+6}{y^3} : \frac{5x-3}{xy^3+2y^3} =$

Aufgabe 6

Vereinfachen Sie $u^2v^2\left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right)^2 : \big((u-v)(v+u)^2\big) =$

1.6 Lösungen

Lösung der Aufgabe 1

$\frac{15a+6}{10a+4} = \frac{3(5a+2)}{2(5a+2)} = \frac{3}{2}$ (Ausklammern im Zähler und Nenner, Kürzen von $(5a+2)$)

Lösung der Aufgabe 2

$\frac{15a+6}{a-2b} \cdot \frac{10b-5a}{10a+4} = \frac{3(5a+2)\cdot(-5)(a-2b)}{(a-2b)\cdot 2(5a+2)} = -\frac{15}{2}$ (Ausklammern und Kürzen)

Lösung der Aufgabe 3

$\frac{(15a+6)^2}{a-2b} \cdot \frac{10b-5a}{(10a+4)^2} = \frac{(3(5a+2))^2}{a-2b} \cdot \frac{(-5)(a-2b)}{(2(5a+2))^2} = \frac{9(5a+2)^2}{a-2b} \cdot \frac{(-5)(a-2b)}{4(5a+2)^2} = \frac{9\cdot(-5)}{4} = -\frac{45}{4}$
(Ausklammern, Potenzgesetze, Kürzen und Rechnen mit Brüchen)

Lösung der Aufgabe 4

$\frac{4x+12y}{x^3} \cdot \frac{(5x^3-2x^3)x}{3y+x} - 3x = \frac{4(x+3y)}{x^3} \cdot \frac{3x^4}{x+3y} - 3x = \frac{4(x+3y)3x^4}{x^3(x+3y)} - 3x = \frac{12x^4(x+3y)}{x^3(x+3y)} - 3x =$
$12x - 3x = 9x$ (Ausklammern, Kommutativgesetz und Kürzen)

Lösung der Aufgabe 5

Lösen Sie erst die quadratische Gleichung $x^2+5x+6=0$ und erinnern Sie sich daran, dass $x^2+px+q = (x-x_1)(x-x_2)$ gilt, wenn x_1 und x_2 die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2+px+q=0$ sind. Formen Sie also x^2+5x+6 in $(x+2)\cdot(x+3)$ und $25x^2-9$ in $(5x+3)\cdot(5x-3)$ um.

$\frac{25x^2-9}{(x+2)^2} \cdot \frac{x^2+5x+6}{y^3} : \frac{5x-3}{xy^3+2y^3} = \frac{25x^2-9}{(x+2)^2}\frac{x^2+5x+6}{y^3}\frac{xy^3+2y^3}{5x-3} = \frac{(5x+3)(5x-3)}{(x+2)^2}\frac{(x+2)(x+3)}{y^3}$
$\frac{(x+2)\cdot y^3}{5x-3} = \frac{(5x+3)(5x-3)(x+2)(x+3)(x+2)y^3}{(x+2)^2y^3(5x-3)} = (5x+3)(x+3).$

Detaillierte Lösung der Aufgabe 6

$u^2v^2\left(\frac{u}{v}-\frac{v}{u}\right)^2 \cdot \frac{1}{(u-v)(v+u)^2} =$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, dass heisst, Division von Brüchen ist Multiplikation mit Kehrwert
$u^2v^2\left(\frac{u^2}{uv}-\frac{v^2}{uv}\right)^2 \cdot \frac{1}{(u-v)(v+u)^2} =$	Gleichnamig machen, das heisst, so erweitern, dass die Brüche den gleichen Nenner haben
$u^2v^2\left(\frac{u^2-v^2}{uv}\right)^2 \cdot \frac{1}{(u-v)(v+u)^2} =$	Auf einen Bruchstrich bringen, das heisst $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$ anwenden
$u^2v^2\left(\frac{(u+v)(u-v)}{uv}\right)^2 \cdot \frac{1}{(u-v)(v+u)^2} =$	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ anwenden, um möglichst viele Faktoren zu bekommen
$u^2v^2\frac{((u+v)(u-v))^2}{(uv)^2} \cdot \frac{1}{(u-v)(v+u)^2} =$	Potenzgesetz $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (Gesetz IIb in AA 203) anwenden
$u^2v^2\frac{(u+v)^2(u-v)^2}{(uv)^2} \cdot \frac{1}{(u-v)(v+u)^2} =$	Potenzgesetz $(ab)^n = a^nb^n$ (Potenzgesetz IIa in AA 203) anwenden
$u^2v^2\frac{(u+v)^2(u-v)^2}{u^2v^2} \cdot \frac{1}{(u-v)(v+u)^2} =$	Potenzgesetz $(ab)^n = a^nb^n$ (Potenzgesetz IIa in AA 203) anwenden
$\frac{u^2v^2(u+v)^2(u-v)^2}{u^2v^2(u-v)(v+u)^2} =$	Auf einen Bruchstrich bringen, das heisst, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ anwenden
$\frac{(u+v)^2(u-v)}{(v+u)^2} =$	Kürzen, das heisst, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ und $a^0 = 1$ für $a \neq 0$ anwenden
$\frac{(u+v)^2(u-v)}{(u+v)^2} =$	Das Kommutativgesetz der Addition, also $a+b=b+a$, anwenden
$\frac{u-v}{1} =$	Kürzen, das heisst, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ und $a^0 = 1$ für $a \neq 0$ anwenden
$u-v$	Die offensichtliche, aber trotzdem erwähnenswerte Umformung $\frac{a}{1} = a$ anwenden

Das Ergebnis ist $u - v$ und lässt sich nicht weiter vereinfachen.

Bemerkung:
Beim Kürzen wissen wir nicht, ob u, v, $u+v$ und $u-v$ nicht 0 sind. Deshalb müsste man eigentlich festhalten, dass diese Lösung nur gültig ist, wenn $u \neq 0$, $v \neq 0$ und $u \neq \pm v$ gilt.

1.7 Tipps

Folgende Tipps sind bei Termumformungen nützlich:

1. Schauen Sie erst, ob Sie Teile im Term vereinfachen können. (Beispiel: Vereinfachen Sie $(5x-3x)\cdot y$ zu $2xy$.)
2. Versuchen Sie möglichst Faktoren zu haben und keine Summanden. (Beispiel: Lassen Sie das Produkt $(x+5)(x-5)$ so stehen und multiplizieren Sie es nicht aus.)
3. Multiplizieren Sie deshalb insbesondere den Nenner in einem Bruchterm nicht aus, denn Sie brauchen die Faktoren, um zu kürzen.
4. Multiplizieren Sie den Zähler eines Bruchterms nur dann aus, wenn Sie Brüche bei einer Addition oder Subtraktion gleichnamig gemacht haben und deshalb erst in ein Produkt umwandeln müssen. (Beispiel: Steht im Zähler $(x+3)(x-2)+2(x+3)$, so formen Sie ihn in $x(x+3)-2(x+3)+2(x+3) = x(x+3)$ um, wobei Sie in diesem Fall nicht sämtliche Faktoren ausmultiplizieren müssen.)
5. Nehmen Sie nur Umformungen vor, die auf gültigen mathematischen Gesetzen basieren. (Beispiel: Kürzen in Summen und Differenzen ist nicht erlaubt.)
6. Gehen Sie lieber in kleinen Schritten vor, wenn Sie sich nicht ganz sicher fühlen.

2 Gleichungen

2.1 Verschiedene Bedeutungen des Gleichheitszeichens

Im *Termumformungsschritt* $3 + x = x + 3$ bedeutet das Gleichheitszeichen, dass der Term $3 + x$ links vom Gleichheitszeichen und der Term $x + 3$ rechts davon für alle möglichen Zahlenwerte, die man für die Variable x einsetzen kann, immer dasselbe Resultat ergibt. Das Gleichheitszeichen hat also die universelle Bedeutung, dass die beiden Terme für alle möglichen Einsetzungen zum gleichen Resultat führen.

Bei der *Gleichung* $x + 3 = 2x - 5$ kann das Gleichheitszeichen nicht mehr dies allgemeine Bedeutung haben, denn setzt man für x die Zahl 0 ein, so resultiert für den Term auf der linken Seite der Wert 3 und für denjenigen auf der rechten Seite -5, und diese beiden Zahlen sind offensichtlich nicht gleich. Bei einer Gleichung ist das Gleichheitszeichen die Aufforderung, Werte zu suchen, die man für die in der Gleichung vorkommenden Variablen einsetzen kann, sodass die Gleichung erfüllt ist und die linke Seite gleich der rechten Seite wird. Die Werte, die man für die Variablen einsetzen kann, sodass die Gleichung erfüllt ist, nennt man die *Lösungsmenge* der Gleichung.

2.2 Äquivalenzumformungen

Um eine gegebene Gleichung oder mehrere Gleichungen, die gleichzeitig erfüllt sein müssen, zu lösen, darf man sie durch gültige Schritte umformen. Die gültigen und somit erlaubten Umformungsschritte heissen *Äquivalenzumformungen*.

Die Äquivalenzumformungen lassen sich in zwei Gruppen aufteilen. Die erste Gruppe besteht aus den oben beschriebenen Termumformungen, die man auf die Terme links und rechts vom Gleichheitszeichen unabhängig voneinander anwenden darf. Die zweite Gruppe hingegen besteht aus Umformungsschritten, die nur auf beide Seiten von Gleichungen (oder Ungleichungen), nicht aber auf einzelne Terme angewendet werden dürfen.

Umformungsschritte für Gleichungen:

- Auf beiden Seiten denselben Term addieren oder subtrahieren:
  $T_1 = T_2 \Rightarrow (T_1) + (T_3) = (T_2) + (T_3)$ und $T_1 = T_2 \Rightarrow (T_1) - (T_3) = (T_2) - (T_3)$
- Auf beiden Seiten mit demselben Term multiplizieren oder durch denselben Term dividieren:
  $T_1 = T_2 \Rightarrow (T_1) \cdot (T_3) = (T_2) \cdot (T_3)$ und $T_1 = T_2 \Rightarrow (T_1) \div (T_3) = (T_2) \div (T_3)$
  (Das gilt nur, wenn $T_3 \neq 0$ ist. Multiplikation mit einer Zahl ungleich null oder Division durch eine Zahl ungleich null ist problemlos, aber schon Multiplikation mit dem einfachen Term x kann die Lösungsmenge verändern.)
- Beide Seiten mit n potenzieren oder auf beiden Seiten die n-te Wurzel ziehen für $n \neq 0$:
  $T_1 = T_2 \Rightarrow (T_1)^n = (T_2)^n$ und $T_1 = T_2 \Rightarrow \sqrt[n]{T_1} = \sqrt[n]{T_2}$
  (Man beachte, dass Potenzieren die Lösungsmenge verändern kann.)
- Beide Seiten zum Exponenten machen oder logarithmieren:
  $T_1 = T_2 \Rightarrow a^{T_1} = a^{T_2}$ und $T_1 = T_2 \Rightarrow \log_a(T_1) = \log_a(T_2)$

Beispiele:
Die Gleichung $x + 2 = 2x - 1$ kann dadurch gelöst werden, dass man auf beiden Seiten erst x subtrahiert, was $2 = x - 1$ ergibt, und danach auf beiden Seiten 1 addiert, was $3 = x$ ergibt. Daraus sieht man sofort, dass die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{3\}$ ist. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit x, ändert man die Lösungsmenge, denn die Lösungsmenge der Gleichung $x(x + 2) = x(2x - 1)$ ist $\mathbb{L} = \{0, 3\}$.
Die Gleichung $x = -x$ hat nur die Lösung $x = 0$. Quadriert man aber beide Seiten, so bekommt man $x^2 = (-x)^2$ und das ist äquivalent zur Gleichung $x^2 = x^2$ mit der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

2.3 Ungleichungen

Bei Ungleichungen dürfen grundsätzlich dieselben Äquivalenzumformungen benutzt werden wie bei Gleichungen, wobei aber noch vorsichtiger vorgegangen werden muss, weil sich auch die Relation zwischen den beiden Seiten ändern kann.

Addition und Subtraktion von Termen auf beiden Seiten ist problemlos, aber bei Multiplikation mit und Division durch eine Zahl $a \neq 0$ muss man vorsichtig sein. Gilt $a > 0$, so bleibt das Relationszeichen gleich. Ist aber $a < 0$, so ändert es seine Richtung.

Beispiel:
Die Ungleichung $3x > 2x$ gilt für alle Werte $x > 0$. Multipliziert man diese Ungleichung mit (-1), so wird daraus $(-3)x < (-2)x$ für dieselbe Lösungsmenge.

3 Strukturbäume

3.1 Termstruktur

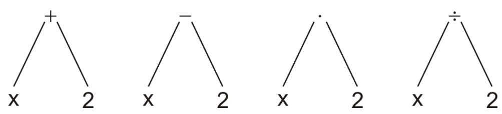
Durch den rekursiven Aufbau mit den Produktionsregeln bekommen die Terme einen Struktur, die bei Einsetzungen und Berechnungen eingehalten werden muss. Der Term $2(x+3)$ beispielsweise ist dadurch entstanden, dass die Terme x und 3 addiert und der daraus resultierende Term mit 2 multipliziert worden ist. Setzt man für x den Wert 7 ein, so muss erst $7+3$ berechnet und das Resultat anschliessend mit 2 multipliziert werden.

Die rekursiven Produktionsregeln liefern also den Plan, wie ein Term berechnet wird, wenn man für die Variablen Zahlen einsetzt. Weil verschiedene Strukturen zum selben Resultat führen, ist der strukturelle Aufbau eines Terms nicht immer sichtbar. Beim Term $1+2+3$ beispielsweise weiss man nicht, ob der Term 1 zum Term $2+3$ addiert worden ist, oder ob der Term $1+2$ zum Term 3 addiert worden ist. Weil das Resultat aber in beiden Fällen dasselbe ist, lässt man die Klammern weg.

3.2 Baumstruktur

Aus den Zahlen und Variablen als einfachste Terme kann man mit den Produktionsregeln kompliziertere Terme aufbauen. So entsteht das, was man in der Mathematik einen Baum nennt.

Die nebenstehende Figur zeigt die Bäume der ersten Stufe für die vier Grundoperationen, bei denen aus den einfachen Termen x und 2 die zusammengesetzten Terme $x+2$, $x-2$, $x \cdot 2$ und $x \div 2$ entstehen.



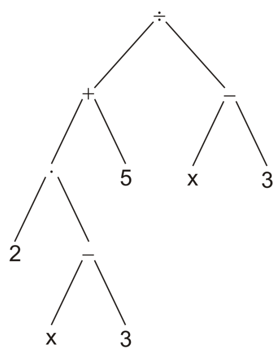
So kann man jeden Term zusammen mit seinem Strukturbaum aufbauen. Andererseits kann man jeden Term analysieren und seinen Strukturbaum bestimmen.

3.3 Beispiel

Die Struktur des Terms

$$\frac{2(x-3)+5}{x-3}$$

kann durch den nebenstehenden Baum dargestellt werden. Die Division $\div$ auf oberster Stufe entspricht dem Bruchstrich. Die nächste Operation im Zähler (links darunter) ist eine Addition, und die nächste Operation im Nenner (rechts darunter) ist eine Subtraktion. So betrachtet ist offensichtlich, dass die beiden Terme $x-3$ nicht gekürzt werden dürfen, weil das unerlaubtes Kürzen in einer Summe wäre.



Den Nenner könnte man durch $1 \cdot (x-3)$ in ein Produkt umwandeln. Den Summanden $+5$ im Zähler wird man aber nicht los. Multipliziert man den Zähler aus, bekommt man $2x-1$.