Stereometrie

Rainer Hauser

Dezember 2010

1 Einleitung

1.1 Beziehungen im Raum

Im dreidimensionalen Euklid'schen Raum sind Punkte nulldimensionale, Geraden eindimensionale und Ebenen zweidimensionale Unterräume. Die möglichen gegenseitigen Lagen dieser Unterräume sind:

- Zwei Punkte können zusammenfallen oder verschieden sein.
- Ein Punkt kann auf einer Geraden liegen oder sich ausserhalb der Geraden befinden.
- Ein Punkt kann in einer Ebene liegen oder sich ausserhalb der Ebene befinden.
- Eine Gerade kann mit einer anderen Geraden zusammenfallen, diese in einem Punkt schneiden, parallel dazu liegen oder windschief dazu sein.
- Eine Gerade kann in einer Ebene liegen, diese in einem Punkt schneiden oder parallel dazu liegen.
- Eine Ebene kann mit einer anderen Ebene zusammenfallen, diese in einer Geraden schneiden oder parallel dazu liegen.

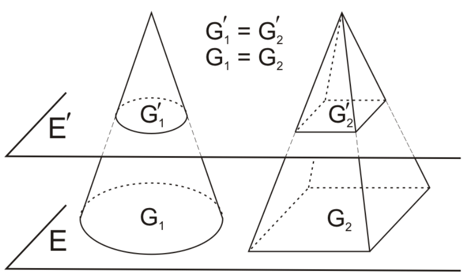
1.2 Schnitte durch Ebenen und Rotation von Flächen

Jede Ebene zerteilt den dreidimensionalen Raum in zwei Teile. Kann man mit endlich vielen Ebenen einen Körper aus dem Raum ausschneiden, sodass der Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten immer eine endliche Länge hat, so spricht man von einem *eben begrenzten Körper*.

Lässt man eine endliche ebene Figur um eine Gerade rotieren und betrachtet man die Menge aller Punkte, die dabei berührt werden, so bekommt man einen *Rotationskörper*. Die Gerade, um die rotiert wird, heisst Achse.

1.3 Längen-, Flächen- und Volumenmessung

Bei der *Längenmessung* werden zwei Strecken als gleich lang definiert, wenn sie kongruent sind, also wenn sie durch Drehung und Verschiebung zur Deckung gebracht werden können. Bei der *Flächenmessung* wird erst die Fläche eines Rechtecks eingeführt und werden anschliessend zwei ebene Figuren als gleich gross definiert, wenn sie durch endlich viele Schnitte so zerlegt werden können, dass immer zwei Teile paarweise kongruent sind, also durch Drehung, Verschiebung und Spiegelung zur Deckung gebracht werden können. Bei der *Volumenmessung* ist Zerlegungsgleichheit eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung.



Das folgende Prinzip schafft eine Verbindung von der Flächenmessung zur Volumenmessung und ist nützlich, um Volumengleichheit festzustellen.

Prinzip von Cavalieri:
Stehen Körper auf derselben Ebene E und werden sie von jeder Parallelebene E' in flächengleichen Figuren geschnitten, so haben diese Körper dasselbe Volumen.

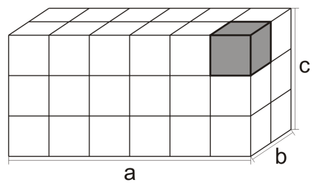
1.4 Winkel zwischen Unterräumen

Man kann Winkel nicht nur zwischen zwei Geraden definieren, sondern auch zwischen einer Geraden und einer Ebene sowie zwischen zwei Ebenen, falls diese sich schneiden. Der Winkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene E ist definiert als der Winkel, den g mit der senkrechten Projektion g' auf die Ebene bildet. Der Winkel zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 ist folgendermassen definiert. Man wählt einen beliebigen Punkt auf der Schnittgeraden, errichtet dort Lote auf der Schnittgeraden, die in diesen Ebenen liegen, und nimmt den Winkel zwischen den Loten als den gesuchten Winkel.

2 Eben begrenzte Körper

2.1 Der Quader

Ein *Quader* mit drei gleich langen Seiten heisst Würfel, und ein Würfel mit Seitenlänge 1 ist ein Einheitswürfel. Beim Quader lassen sich Oberfläche und Volumen leicht berechnen.



Sein Volumen V ist definiert als Anzahl der Einheitswürfel. Für ganzzahlige Seitenlängen – verallgemeinert auf reelle Zahlen – ist das Volumen das Produkt der drei Seitenlängen.

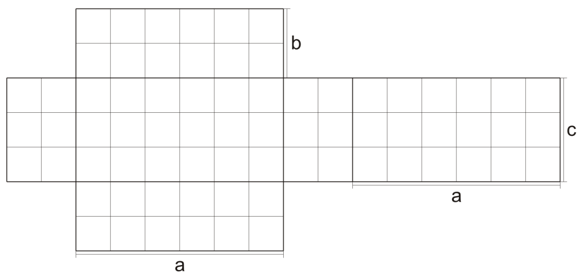
Die Oberfläche S lässt sich einfach berechnen, wenn man das Netz des Quaders aufzeichnet. Somit ist die Oberfläche

$$S = 2(ab + bc + ac) \tag{1}$$

und das Volumen

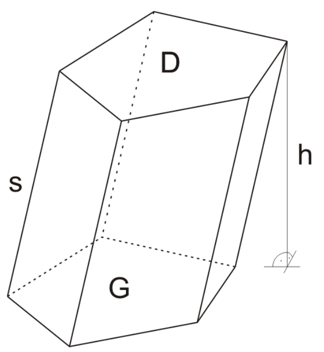
$$V = abc \tag{2}$$

für einen Quader mit Seitenlängen a, b und c.



2.2 Das Prisma

Ein *Prisma* besteht aus zwei parallelen, kongruenten n-Ecken als Grund- und Deckfläche sowie aus den Seitenflächen, dem Mantel. Stehen alle Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche, so spricht man von einem senkrechten oder geraden, sonst von einem schiefen Prisma. Für die Flächeninhalte von Grundfläche, Deckfläche und Mantel schreibt man G, D und M.



Die Höhe h ist der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche, und s ist die Länge der Seitenkanten. Die Oberfläche ist

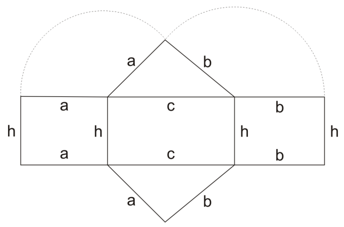
$$S = G + D + M \tag{3}$$

und das Volumen ist

$$V = G \cdot h \tag{4}$$

für ein Prisma.

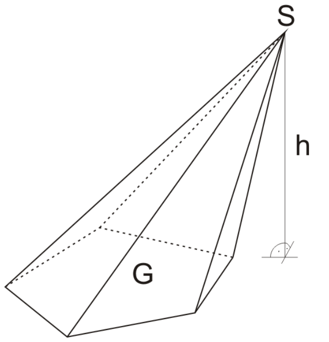
Wählt man eine der Seitenflächen als Grundfläche, ist ein Quader auch ein senkrechtes Prisma. Es gelten also sowohl die Formeln (1) und (2) wie auch (3) und (4), wie man sich leicht überlegt.



Die nebenstehende Abbildung zeigt als Beispiel das Netz eines geraden Prismas mit dreieckiger Grundfläche. Der Flächeninhalt M des Mantels eines beliebigen geraden Prismas ist immer das Produkt des Umfangs der Grundfläche und der Höhe. Im Beispiel gilt $M = (a + b + c) \cdot h$. Weil die Grund- und die Deckfläche kongruent sind, gilt für jedes Prisma $D = G$.

2.3 Die Pyramide

Eine *Pyramide* besteht aus einem n-Eck als Grundfläche sowie aus den Seitenflächen, die in der Spitze S der Pyramide zusammenlaufen und den Mantel bilden. Ist die Grundfläche ein regelmässiges n-Eck und fällt der Höhenfusspunkt mit dem Mittelpunkt der Grundfläche zusammen, so nennt man die Pyramide eine n-seitige regelmässige Pyramide.



Die Höhe h ist der Abstand zwischen der Grundfläche und der Pyramidenspitze. Die Oberfläche ist

$$S = G + M \tag{5}$$

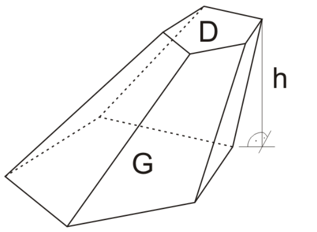
und das Volumen ist

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \tag{6}$$

für eine Pyramide.

Die Formel (5) für die Oberfläche ist offensichtlich. Weshalb aber das Volumen (6) ein Drittel des Prismavolumens (4) ist, braucht eine Begründung, die hier nur angedeutet wird. Ein senkrechtes Prisma mit dreieckiger Grundfläche kann in drei Pyramiden mit gleichem Volumen zerlegt werden.

Ein *Pyramidenstumpf* ist eine Pyramide, dessen Spitze abgeschnitten wurde, und bei der die Grund- und Deckfläche parallel sind. Die Grössenverhältnisse in der ursprünglichen und in der abgeschnittenen Pyramide berechnet man mit Ähnlichkeit.



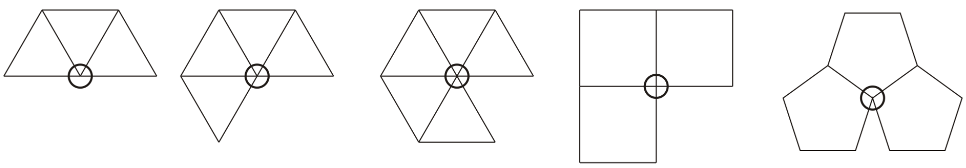
Die Höhe h ist der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche. Das Volumen ist

$$V = \frac{1}{3} \cdot (G + \sqrt{G \cdot D} + D) \cdot h \tag{7}$$

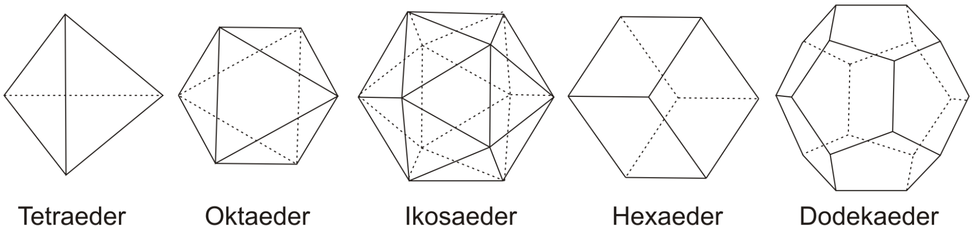
für einen Pyramidenstumpf.

2.4 Reguläre Polyeder und Euler'scher Polyedersatz

Ein *reguläre Polyeder* ist ein eben begrenzter Körper, dessen Begrenzungsflächen kongruente, regelmässige Vielecke sind, an dessen Ecken jeweils gleich viele Kanten zusammentreffen, und der keine einspringenden Ecken hat. Weil in einer Ecke – in der unten stehenden Abbildung durch einen Kreis markiert – mindestens drei n-Ecke zusammentreffen müssen, diese aber noch Raum für eine Krümmung lassen müssen, kann es höchstens fünf solche Polyeder geben.



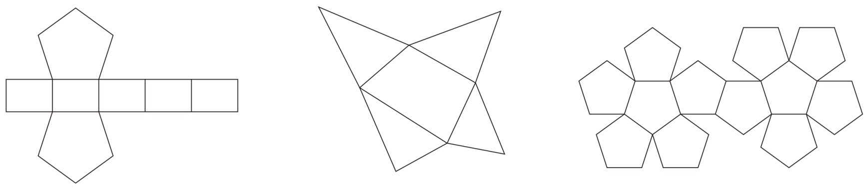
Beginnt man mit einer solchen Ecke und ergänzt weitere n-Ecke derselben Sorte, so lassen sich alle fünf Ecken zu regulären Polyeder ergänzen. Wegen der Anzahl Flächen heissen sie Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Ein Hexaeder ist einfach ein Würfel. Die fünf regulären Polyeder zusammen heissen auch *Platonische Körper*.



Für alle einfachen Polyeder (also Polyeder ohne "Löcher") gilt der *Euler'sche Polyedersatz*: Ist e die Anzahl Ecken, k die Anzahl Kanten und f die Anzahl Flächen des Polyeders, so gilt $e - k + f = 2$.

2.5 Netze von eben begrenzten Körpern

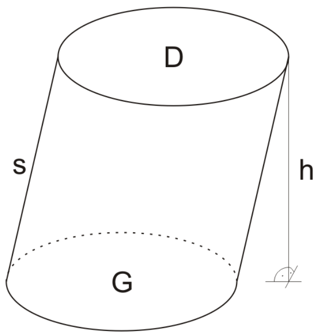
Die Oberflächen von eben begrenzten Körpern lassen sich als Netze in einer Ebene darstellen. In dieser Form lässt sich der Oberflächeninhalt einfach bestimmen. Die unten stehende Abbildung zeigt von links nach rechts das Netz eines geraden Prismas mit einem regulären Fünfeck als Grundfläche, das Netz einer schiefen Pyramide mit viereckiger Grundfläche und das Netz eines Dodekaeders. Beim Netz des Prismas ist der Mantel in der Mitte, während Grund- und Deckfläche nach aussen geklappt sind, und das Netz der Pyramide ist von der Spitze her aufgeklappt, sodass die Grundfläche in der Mitte zu liegen kommt. Das ist die Art, wie man Netze von Prismen und Pyramiden üblicherweise zeichnet.



3 Rotationskörper

3.1 Der Kreiszylinder

Ein *Kreiszylinder* ist ein Körper, der aus zwei parallelen, kongruenten Kreisflächen als Grund- und Deckfläche sowie einem Mantel, der aus unendlich vielen parallelen Mantellinien besteht, begrenzt ist. Stehen alle Mantellinien senkrecht auf der Grundfläche, so spricht man von einem geraden, sonst von einem schiefen Kreiszylinder.



Die Höhe h ist der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche, und s ist die Länge der Mantellinien. Die Oberfläche ist

$$S = G + D + M \tag{8}$$

und das Volumen ist

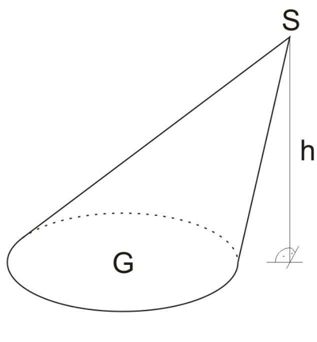
$$V = G \cdot h \tag{9}$$

für einen Kreiszylinder.

Lässt man ein Rechteck um eine seiner Seiten rotieren, entsteht ein gerader Kreiszylinder. Der Kreiszylinder ist aber auch mit dem Prisma verwandt, wie die Ähnlichkeit der Formeln (4) und (9) erkennen lassen. Der Mantel eines Prismas besteht aus endlich vielen Seitenflächen, während der Mantel eines Kreiszylinders aus unendlich vielen Mantellinien besteht. Die Folge von Prismen mit regelmässigen n-Ecken als Grundfläche approximieren für wachsendes n den Kreiszylinder beliebig genau.

3.2 Der Kreiskegel

Ein *Kreiskegel* ist ein Körper, der durch eine kreisförmige Fläche als Grundfläche und einem Mantel, der aus unendlich vielen Mantellinien besteht, begrenzt ist. Fällt der Höhenfusspunkt mit dem Mittelpunkt der Grundfläche zusammen, so spricht man von einem geraden Kreiskegel, sonst von einem schiefen Kreiskegel.



Die Höhe h ist der Abstand zwischen der Grundfläche und der Kegelspitze. Die Oberfläche ist

$$S = G + M \tag{10}$$

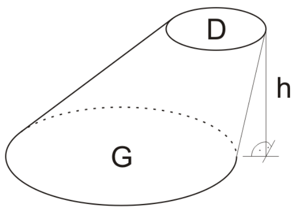
und das Volumen ist

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \tag{11}$$

für einen Kreiskegel.

Lässt man ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten rotieren, entsteht ein gerader Kreiskegel. Der Kreiskegel ist aber auch mit der Pyramide verwandt, wie die Ähnlichkeit der Formeln (6) und (11) erkennen lassen. Der Mantel einer Pyramide besteht aus endlich vielen Seitenflächen, während der Mantel eines Kreiskegels aus unendlich vielen Mantellinien besteht. Die Folge von Pyramiden mit regelmässigen n-Ecken als Grundfläche approximieren für wachsendes n den Kreiskegel beliebig genau.

Ein *Kegelstumpf* ist ein Kreiskegel, dessen Spitze abgeschnitten wurde, und bei dem die Grund- und Deckfläche parallel sind. Die Grössenverhältnisse im ursprünglichen und im abgeschnittenen Kreiskegel berechnet man mit Ähnlichkeit.



Die Höhe h ist der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche. Das Volumen ist

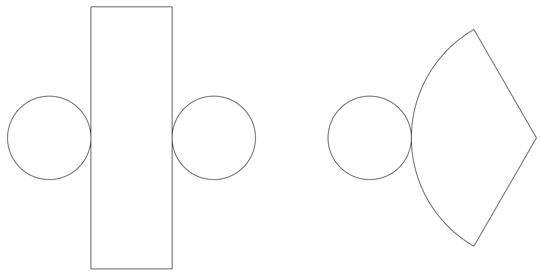
$$V = \frac{1}{3} \cdot (G + \sqrt{G \cdot D} + D) \cdot h \quad (12)$$

für einen Kegelstumpf.

Die Verwandtschaft von Pyramide und Kegel bedeutet auch eine Verwandtschaft von Pyramidenstumpf und Kegelstumpf, die sich in der Ähnlichkeit der Formeln (7) und (12) zeigt.

3.3 Die Netze von Rotationskörpern

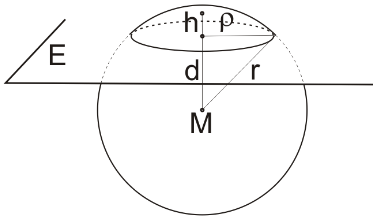
Beim Zylinder lassen sich Grund- und Deckfläche wegschneiden und beim Kegel lässt sich die Grundfläche wegschneiden, sodass der Mantel, den man jetzt entrollen kann, übrig bleibt. Die nebenstehende Abbildung zeigt links das Netz eines geraden Kreiszylinders und rechts das Netz eines geraden Kreiskegels. Sowohl der Mantel eines Zylinders wie auch der Mantel eines Kegels ist also eine Fläche, die sich in die Ebene abwickeln lässt.



3.4 Die Kugel

Die *Oberfläche* einer Kugel ist die Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt M die gleiche Entfernung r haben. Sie entsteht durch Rotation einer Halbkreislinie um ihren Durchmesser. Der von der Kugeloberfläche umschlossene Körper heisst *Kugel*.

Eine Ebene E schneidet die Kugeloberfläche in einem Kreis. (Im rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten d, ρ und r sind d und r für alle Punkte auf dem Rand der Schnittfigur gleich, sodass auch ρ für alle Punkte gleich sein muss.)



Die beiden Teile der Kugel, die durch den Schnitt einer Ebene entstehen, heissen *Kugelsegmente*. Zwischen dem Kugelradius r, der Höhe h und dem Schnittkreisradius ρ besteht (Höhensatz) die Beziehung $\rho^2 = h(2r - h)$.

Weil $\rho^2 = r^2 - d^2$ gilt und der Flächeninhalt der Schnittfläche somit $\pi\rho^2 = \pi r^2 - \pi d^2$ ist, lässt sich das Volumen einer Kugel mit dem Prinzip von Cavalieri aus dem Volumen eines Kreiszylinders mit zwei ausgebohrten, kegelförmigen Löchern als

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad (13)$$

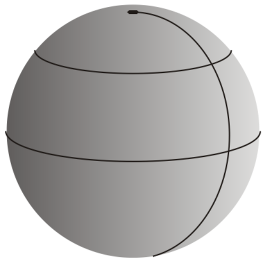
bestimmen.

Die Kugeloberfläche lässt sich im Gegensatz zu den bisher betrachteten Rotationskörpern nicht in die Ebene abwickeln, und ihr Inhalt kann somit nicht einfach wie beim Zylinder mit (8) und beim Kegel mit (10) aus der ebenen Geometrie abgeleitet werden. Für den Oberflächeninhalt der Kugel findet man

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad (14)$$

durch Überlegungen, bei denen man kleine Flächenstücke betrachtet, deren Ecken man mit dem Kugelmittelpunkt verbindet. Die so entstehenden Körper sind fast Pyramiden, deren Volumen man kennt. Setzt man alle diese kleinen Körper zusammen, bekommt man einerseits das Volumen der ganzen Kugel, andererseits aber auch die genäherte Oberfläche der Kugel.

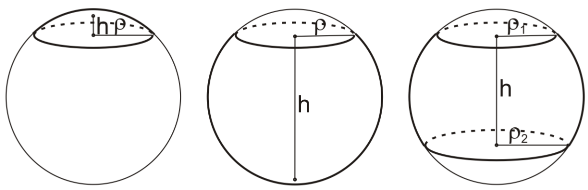
Schneidet eine Ebene eine Kugel durch den Mittelpunkt, so ist die Schnittfigur ein Grosskreis. Auf der Erdoberfläche ist ein Netz von Kreisen als Koordinatensystem definiert worden, das aus Längenkreisen (Meridianen) und Breitenkreisen besteht.



Die Meridiane sind die Hälften von Grosskreisen, die sich im Nord- und Südpol schneiden. Von den Breitenkreisen ist nur der Äquator ein Grosskreis, während die parallel verlaufenden Breitenkreise immer kleiner werden, je näher sie bei einem Pol liegen.

3.5 Teile der Kugel

Unter den Teilen der Kugel ist das *Kugelsegment* das fundamentalste. Kennt man dessen Oberfläche und Volumen kann man Oberfläche und Volumen einer *Kugelschicht* bestimmen, indem man zwei Kugelsegmente von der ganzen Kugel abzieht, und kann man analog Oberfläche und Volumen eines *Kugelsektors* berechnen, indem man ein Kugelsegment und einen Kreiskegel addiert. Betrachtet man nur den Teil der Oberfläche eines Kugelsegments, der zur Kugeloberfläche gehört, spricht man von einer *Kugelhaube* wie in der unten stehenden Abbildung links und in der Mitte, und betrachtet man dnur den Teil der Oberfläche einer Kugelschicht, der zur Kugeloberfläche gehört, spricht man von einer *Kugelzone* wie in der Abbildung unten rechts.



Kugelhauben und Kugelzonen haben

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

als Flächeninhalt, der somit ausser vom Radius r nur von der Höhe h abhängt.

Das Volumen eines Kugelsegments ist

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2(3r - h) = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h(3\rho^2 + h^2)$$

und das Volumen einer Kugelschicht ist

$$V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2)$$

wie man auf analoge Weise herleiten kann wie das Kugelvolumen. Das Volumen eines Kugelsektors ist

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

wie man aus dem Volumen eines Kugelsegments und demjenigen eines Kreiskegels berechnen kann.