Quadratische Gleichungen

Rainer Hauser

Oktober 2010

1 Einleitung

1.1 Die Quadratwurzel

Die Quadratwurzel einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ ist definiert als die Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$, für die $b^2 = a$ gilt. Man schreibt $\sqrt{a}$ für diese Zahl b. Somit gilt $a \geq 0$, $\sqrt{a} \geq 0$ und $(\sqrt{a})^2 = a$. Es besteht also ein Unterschied zwischen $\sqrt{9} = 3$ gemäss Definition und der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-3, +3\}$ der Gleichung $x^2 = 9$, die auch -3 enthält. Unter $\sqrt{2}$ versteht man den positiven Wert und schreibt $-\sqrt{2}$, wenn man den negativen Wert meint.

1.2 Bemerkung zur Lösbarkeit von Gleichungen

Die Erweiterung der Zahlen von den natürlichen über die ganzen und rationalen zu den reellen Zahlen hatte mit dem Lösen von Gleichungen zu tun. Die Gleichung $x + 2 = 1$ ist innerhalb der natürlichen Zahlen nicht lösbar und führte zur Definition der negativen Zahlen. Ebenso ist die Gleichung $2x = 3$ innerhalb der ganzen Zahlen nicht lösbar und führte zur Definition der gebrochenen Zahlen. Schliesslich ist die Gleichung $x^2 = 2$ mit rationalen Zahlen nicht lösbar und führte zur Definition der irrationalen Zahlen und damit zu den reellen Zahlen.

Dieser Weg über $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ ist aber noch nicht zu Ende, denn die Gleichung $x^2 = -1$ ist innerhalb der reellen Zahlen unlösbar, kann aber in den komplexen Zahlen, die mit $\mathbb{C}$ bezeichnet werden, gelöst werden. Weil hier nur in $\mathbb{R}$ gerechnet wird, hat im Folgenden die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung.

2 Einfach lösbare quadratische Gleichungen

2.1 Die allgemeine Form der quadratischen Gleichung

Unter einer quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten versteht man eine Gleichung, die durch gültige Umformungen in die Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit den reellen Koeffizienten a, b und c gebracht werden kann. Wir nehmen $a \neq 0$ an, weil sonst der quadratische Term verschwindet und die Gleichung damit zur linearen Gleichung wird. Man kann eine quadratische Gleichung somit immer in die Form

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{1}$$

bringen, die manchmal gegenüber der allgemeinen Form Vorteile bietet.

2.2 Die faktorisierte quadratische Gleichung

Liegt eine quadratische Gleichung in *faktorisierter Form* vor, so hat sie die Form $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, oder sie kann wie am Beispiel $(5x - 3)(2x + 7) = (x - \frac{3}{5})(x - (-\frac{7}{2})) = 0$ gezeigt in diese Form gebracht werden. Weil das Produkt von zwei Faktoren nur dann 0 sein kann, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist, in diesem Fall aber auch 0 sein muss, kann man für eine Gleichung wie der obigen die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x_1, x_2\}$ direkt angeben. Liegt die quadratische Gleichung in der Form $(x - x_1)^2 = 0$ vor, so hat sie nur die eine Lösung x_1.

Eine faktorisierte quadratische Gleichung kann man selbstverständlich ausmultiplizieren, um sie in die Form (1) zu bringen. Umgekehrt kann man eine quadratische Gleichung mit den zwei Lösungen x_1 und x_2 beziehungsweise mit nur der einen Lösung x_1 in faktorisierte Form bringen, indem man $(x-x_1)(x-x_2) = 0$ beziehungsweise $(x - x_1)^2 = 0$ schreibt.

2.3 Die reinquadratische Gleichung

Ist $b = 0$, so heisst die quadratische Gleichung *reinquadratisch* und kann zu

$$x^2 = -\frac{c}{a} \tag{2}$$

umgeformt werden. Diese Gleichung hat offensichtlich die beiden Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, falls $\frac{c}{a}$ eine negative Zahl ist, nur die Lösung $x = 0$, falls $\frac{c}{a} = 0$ ist, und keine Lösung innerhalb $\mathbb{R}$, falls $\frac{c}{a}$ eine positive Zahl ist.

2.4 Lösung durch Substitution

Die Gleichung $(x - 3)^2 = 144$ ist keine reinquadratische Gleichung, wenn man sie ausmultipliziert, aber sie sieht einer solchen recht ähnlich. Mit $y = x - 3$ als *Substitution* lässt sie sich in $y^2 = 144$ umformen, was jetzt reinquadratisch ist und die beiden Lösungen $y = -12$ und $y = +12$ hat. Weil $y = x - 3$ gesetzt worden ist, kann jetzt in diesen beiden Lösungen die Substitution rückgängig gemacht werden, was zu den beiden Lösungen $x - 3 = -12$ und $x - 3 = +12$ führt. Das sind lineare Gleichungen, die sich leicht auflösen lassen. Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L} = \{-9, 15\}$.

2.5 Lösung durch quadratisches Ergänzen

Alle quadratischen Gleichungen lassen sich lösen, wenn man sie in die Form $(x+k)^2 = m$ für irgendwelche reellen Zahlen k und m und damit durch Substitution in die Form (2) bringen kann. Multipliziert man diese Gleichung aus und bringt sie in die allgemeine Form (1), so bekommt man

$$x^2 + 2kx + (k^2 - m) = 0$$

mit $2kx$ für $\frac{b}{a}$ und $k^2 - m$ für $\frac{c}{a}$. Die Frage ist, wie man die Grössen k und m aus der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung bestimmen kann. In $\frac{c}{a}$ haben sich k^2 und m derart vermischt, dass sie nicht mehr auseinander zu halten sind. In $\frac{b}{a}$ hingegen steckt k als $k = \frac{b}{2a}$. Kennt man k, kann man aus $k^2 - m = \frac{c}{a}$ auch m bestimmen.

Beispiel:
Aus der Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$ beziehungsweise $x^2 - 6x = -8$ lässt sich $k = -3$ ableiten. Um sie in die gewünschte Form zu bringen, kann man auf beiden Seiten k^2 hinzufügen. Das gibt $x^2 - 6x + (-3)^2 = (-3)^2 - 8$. Dafür können wir jetzt $(x - 3)^2 = 1$ schreiben, was durch Substitution gelöst werden kann und zur Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{2, 4\}$ führt.

3 Die allgemeine Lösung

3.1 Quadratisches Ergänzen der allgemeinen Form

Das quadratische Ergänzen führt immer zum Ziel. Wir können es also auch auf die allgemeine Form (1) anwenden, was zu

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

oder umgeformt, sodass man durch Substitution zu einer reinquadratischen Gleichung in der Form (2) kommt, weiter zu

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{3}$$

führt.

3.2 Die Diskriminante

Ist die rechte Seite der Gleichung (3) grösser als 0, so gibt es zwei Lösungen, ist sie gleich 0, so gibt es eine Lösung, und ist sie kleiner als 0, so gibt es (innerhalb der reellen Zahlen) keine Lösung. Weil der Nenner immer positiv ist, hängt die Anzahl Lösungen also einzig vom Zähler ab. Die Grösse $b^2 - 4ac$ heisst deshalb *Diskriminante*, denn mit ihr lassen sich die verschiedenen quadratischen Gleichungen nach der Menge ihrer Lösungen unterscheiden. (Das Wort "diskriminieren" stammt aus dem Lateinischen und bedeutete ursprünglich einfach "unterscheiden".)

3.3 Die Lösungsformel

Entweder mit Substitution oder direkt mit $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ lässt sich aus (3) die allgemeine Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ als

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

angeben, in der die Diskriminante jetzt unter der Wurzel erscheint. Das ist die *allgemeine Lösungsformel* einer quadratischen Gleichung.

Beispiel:
Setzt man die Koeffizienten der quadratischen Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$, für die wir oben die Lösungen $\mathbb{L} = \{2, 4\}$ gefunden haben, in die allgemeine Lösungsformel ein, so ergibt das $x_{1,2} = 3 \pm 1$, was – wie nicht anders zu erwarten war – dieselben Lösungen ergibt.

3.4 Der Satz von Viëta

Weil sich jede quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit den zwei Lösungen x_1 und x_2 einerseits eindeutig in die Form (1) und andererseits bis auf die Reihenfolge der Faktoren ebenfalls eindeutig in die faktorisierte Form $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ bringen lässt, ist es nicht verwunderlich, dass zwischen den beiden Lösungen und den Koeffizienten a, b und c (beziehungsweise $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$) ein Zusammenhang besteht. Dieser Zusammenhang ist im folgenden Satz beschrieben.

Satz von Viëta:
Hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die beiden Lösungen x_1 und x_2, so gilt die Abhängigkeit

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \tag{5}$$

zwischen den Lösungen und den Koeffizienten.

Beweis:
Multipliziert man $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ aus und vergleicht die Koeffizienten mit denen von $ax^2 + bx + c = 0$, so folgt die Behauptung unmittelbar. (Haben zwei quadratische Gleichungen gleiche Lösungen, so müssen ihre Koeffizienten in der Form (1) gleich sein.)

Beispiel:
In der quadratischen Gleichung $5x^2 - 12x + 7 = 0$ fällt sofort auf, dass die Summe der Koeffizienten 0 ergibt und $x = 1$ eine Lösung sein muss. Aus einer der beiden Gleichungen (5) lässt sich mühelos die andere Lösung $x = \frac{7}{5}$ bestimmen. Der Satz von Viëta kann also helfen, eine quadratische Gleichung schneller als mit der Lösungsformel zu lösen.

3.5 Anwendungen

Probleme im Alltag können zu quadratischen Gleichungen führen. Im Folgenden werden zwei Beispiele eingehend besprochen.

DIN-A-Reihe
Ein Blatt Papier im Format A4 hat die besondere Eigenschaft, dass das Verhältnis der Seiten gleich bleibt, wenn man es halbiert. Das gilt für die ganze DIN-A-Reihe. Ein A0-Bogen ergibt zwei A1-Bögen, wenn man es halbiert, ein A1-Bogen gibt zwei A2-Bögen, wenn man es halbiert, und so weiter. Dabei bleibt das Verhältnis der Seitenlängen gleich.

Bezeichnet man mit a die Länge der grösseren und mit b die Länge der kleineren Seite, so gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{2b}{a}$$

oder

$$x = \frac{2}{x}$$

mit $x = \frac{a}{b}$, also dem Seitenverhältnis.

Daraus folgt die reinquadratische Gleichung $x^2 = 2$ mit den beiden Lösungen $\pm\sqrt{2}$. Hier ist offensichtlich nur die positive Lösung sinnvoll. Die längere Seite a ist also gleich lang wie die Diagonale im Quadrat, deren Seite gleich der kürzeren Seite b ist.

Der goldene Schnitt
In der Architektur hat sich gezeigt, dass Bauten, bei denen die Breite b und die Höhe h im Verhältnis $b + h : b$ stehen, als besonders wohl geformt empfunden werden. Es gilt also

$$\frac{b}{h} = \frac{b+h}{b}$$

oder

$$\frac{b}{h} = \frac{b}{b} + \frac{h}{b}$$

und man kann dafür

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

mit $x = \frac{b}{h}$ schreiben.

Diese Gleichung lässt sich zu $x^2 - x - 1 = 0$ umformen, indem man beide Seiten mit x multipliziert. Die beiden Lösungen dieser Gleichung sind

$$x_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

gemäss Lösungsformel (4). Das ist der so genannte *goldene Schnitt*.