Potenzen und Potenzfunktionen

Rainer Hauser

September 2014

1 Einleitung

1.1 Potenzen als vereinfachte Schreibweise

Vom Zählen zur Addition: Zählen ist wohl die ursprünglichste mathematische Operation. Sie entspricht der *Nachfolgerfunktion* auf den natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$. Als Vereinfachung für den mehrfachen Aufruf der Nachfolgerfunktion ist die *Addition* eingeführt worden: $10+1+1+1 = 10+3$. Sie erfüllt unter anderem das *Kommutativgesetz* $n+m = m+n$ und lässt sich auf Brüche und negative Zahlen erweitern.

Von der Addition zur Multiplikation: Als Vereinfachung für das mehrfache Addieren derselben Zahl ist die *Multiplikation* eingeführt worden: $7+7+7+7+7 = 5 \cdot 7$. Sie erfüllt unter anderem das *Kommutativgesetz* $n \cdot m = m \cdot n$ und lässt sich auf Brüche und negative Zahlen erweitern. Zudem hat sie bei der Berechnung einer Rechtecksfläche eine natürliche Anwendung in der Geometrie.

Von der Multiplikation zum Potenzieren: Als Vereinfachung für das mehrfache Multiplizieren mit derselben Zahl ist das *Potenzieren* eingeführt worden: $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$. Das Potenzieren erfüllt kein Kommutativgesetz, denn es gilt zum Beispiel $2^3 \neq 3^2$, und a^n ist definiert für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, weil n die Anzahl gleicher Faktoren bedeutet.

1.2 Potenzgesetze

Für die *Potenz* a^n mit der *Basis* $a \in \mathbb{R}$ und dem *Exponenten* $n \in \mathbb{N}$ lassen sich allgemeine Gesetze beweisen. Im Folgenden werden diese jedoch nur hingeschrieben und an Beispielen intuitiv begründet, ohne dass sie formell hergeleitet werden.

Wenn das Potenzieren a^n über die Anzahl n gleicher Faktoren a definiert ist, so ist offensichtlich, dass beispielsweise $a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ gilt. Allgemein lässt sich daraus

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad\qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ (m > n) \tag{1}$$

herleiten. Auch an einem Beispiel lässt sich die linke Seite von

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{2}$$

veranschaulichen, denn $(a \cdot b)^3 = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$ gilt. Auf ähnliche Weise sieht man, dass beispielsweise $\left(a^3\right)^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^6$ gilt. Allgemein lässt sich daraus

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} \tag{3}$$

herleiten.

Bemerkung: Diese Potenzgesetze liessen sich noch etwas allgemeiner fassen, aber die obige Version reicht vorerst. Es ist auch zu beachten, dass man $a \neq 0$ beziehungsweise $b \neq 0$ verlangen muss, falls a oder b im Nenner erscheint.

1.3 Erweiterung des Exponentbegriffs

Sowohl die Addition wie auch die Multiplikation basierte ursprünglich auf einer Anzahl Summanden, konnten aber problemlos zu einer Operation $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erweitert werden, sodass sich die Frage stellt, ob man das Potenzieren nicht auch auf Exponenten erweitern kann, die nicht in $\mathbb{N}$ liegen.

Die Erweiterung von natürlichen Zahlen als Exponenten auf allgemeinere Zahlen als Exponenten darf grundsätzlich frei definiert werden, sollte aber durch ihre Brauchbarkeit überzeugen, wenn sie allgemein anerkannt werden soll. Im Folgenden werden die Exponenten erst so auf ganze, danach auf rationale und schliesslich auf reelle Zahlen ausgedehnt, dass die Potenzgesetze (1), (2) und (3) weiterhin gelten, auch wenn sie nicht mehr über die Anzahl Faktoren begründet werden können. Dieser Ansatz hat sich als höchst erfolgreich herausgestellt.

2 Erweiterung zu reellen Zahlen als Exponenten

2.1 Ganzzahlige Exponenten

Wenn das Potenzgesetz (1) auch für nicht-natürliche Zahlen gelten sollen, so muss

$$a^0 = 1$$

gelten. Das kann man sich am einfachen Beispiel $a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0$ klar machen, denn die einzige Zahl, die mit $a \neq 0$ multipliziert wieder a ergibt, ist die Zahl 1.

Ebenso lässt sich aus dem Potenzgesetz (1)

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

herleiten, denn aus $a^1 \cdot a^{-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$ folgt $a^{-1} = \frac{a^0}{a^1}$. Mit den Potenzgesetzen (2) und (3) folgt deshalb weiter

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

wegen $a^{-n} = a^{(-1)\cdot n} = \left(a^{-1}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$.

Negative Zahlen als Exponenten kommen in der Physik oft vor. So schreibt man in *wissenschaftlicher Schreibweise* $3.074 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ statt $30.74\,\mathrm{mm}$. Ebenso schreibt man für die SI-Einheit der Geschwindigkeit manchmal $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ statt $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

2.2 Rationale Exponenten

Ähnlich wie bei der Erweiterung auf negative Zahlen kann das Potenzgesetz (1) benutzt werden, um aus $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$ oder allgemeiner aus $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

und weiter mit dem Potenzgesetz (3)

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

herzuleiten.

Indem n-te Wurzeln durch gebrochene Exponenten dargestellt werden, lassen sich die Wurzelgesetze wie

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

leicht nachweisen. Auch Aufgaben wie

$$\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}} = \left(a\left(a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a\left(a^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a \cdot a^{\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^1 \cdot a^{\frac{7}{8}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{1+\frac{7}{8}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{8}}$$

lassen sich so problemlos durch die Potenzgesetze und einfaches Bruchrechnen lösen.

2.3 Reelle Exponenten

Wie kann man weiter Exponenten auf irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$ oder π erweitern, sodass Ausdrücke wie $a^{\sqrt{2}}$ und a^{π} eine sinnvolle Bedeutung bekommt? Weil Dezimalbrüche für irrationale Zahlen immer nur Näherungen sind, kann man sie nur bis zu einer endlichen Anzahl Dezimalstellen berechnen. Mit der Näherung $\sqrt{2} \approx 1.4142135$ kann man den Wert für $7^{\sqrt{2}}$ annähern:

$\sqrt{2} \approx 1$	$7^1 = 7$	$\sqrt{2} \approx 2$	$7^2 = 49$
$\sqrt{2} \approx 1.4$	$7^{1.4} = 15.24534497$	$\sqrt{2} \approx 1.5$	$7^{1.5} = 18.52025918$
$\sqrt{2} \approx 1.41$	$7^{1.41} = 15.54491088$	$\sqrt{2} \approx 1.42$	$7^{1.42} = 15.85036315$
$\sqrt{2} \approx 1.414$	$7^{1.414} = 15.66637899$	$\sqrt{2} \approx 1.415$	$7^{1.415} = 15.69689404$
$\sqrt{2} \approx 1.4142$	$7^{1.4142} = 15.67247725$	$\sqrt{2} \approx 1.4143$	$7^{1.4143} = 15.67552727$
$\sqrt{2} \approx 1.41421$	$7^{1.41421} = 15.67278223$	$\sqrt{2} \approx 1.41422$	$7^{1.41422} = 15.67308721$
$\sqrt{2} \approx 1.414213$	$7^{1.414213} = 15.67287372$	$\sqrt{2} \approx 1.414214$	$7^{1.414214} = 15.67290422$
$\sqrt{2} \approx 1.4142135$	$7^{1.4142135} = 15.67288897$	$\sqrt{2} \approx 1.4142136$	$7^{1.4142136} = 15.67289202$

Auf diese Weise kann man beliebig viele Stellen von $7^{\sqrt{2}}$ bestimmen, wenn man genügend Stellen von $\sqrt{2}$ kennt. Die beiden Näherungen $7^{1.414}$ und $7^{1.415}$ unterscheiden sich erst in der zweiten Stelle nach dem Komma. Somit kennt man 15.6 und weiss, dass die beiden Ziffern vor dem Komma und eine Ziffer nach dem Komma sich durch genauere Näherungen nicht mehr ändern. Benötigt man vier Stellen nach dem Komma, so muss man bis $7^{1.4142135}$ und $7^{1.4142136}$ rechnen, um 15.6728 sicher zu wissen.

Damit lassen sich die *Potenzgesetze* allgemein formulieren. Für alle $p, q \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^1 = a \qquad a^0 = 1 \qquad a^{-1} = \frac{1}{a} \tag{4}$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \tag{5}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \tag{6}$$

$$\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q} \tag{7}$$

Bemerkung: Die Potenzgesetze (4) bis (7) gelten nicht für alle $a, b \in \mathbb{R}$. So ist a^{-1} beispielsweise nur für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert, und $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ entspricht keine reelle Zahl, falls $a < 0$ gilt. Hier soll auch festgelegt werden, dass 0^0 nicht definiert ist, weil jede mögliche Definition zu Problemen führt.

3 Potenzfunktionen

3.1 Gerade und ungerade Funktionen

Der Graph der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, während der Graph von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ um den Nullpunkt um 180° gedreht mit sich selber zusammenfällt. Für ganzzahlige Exponenten verhalten sich die Graphen von $x \mapsto x^n$ für gerade n wie $x \mapsto x^2$ und für ungerade n wie $x \mapsto x^3$ in Bezug auf Symmetrie. Das lässt sich folgendermassen fassen.

Definition:
Eine reelle Funktion f mit Definitionsbereich symmetrisch zu 0 heisst *gerade*, wenn für alle x im Definitionsbereich $f(-x) = f(x)$ gilt.

Beispiele:
Die Funktionen $f(x) = x^n$ für gerades n, $f(x) = x^6 + 3x^4 - 5x^2 + 17$ und $\cos x$ sind gerade.

Definition:
Eine reelle Funktion f mit Definitionsbereich symmetrisch zu 0 heisst *ungerade*, wenn für alle x im Definitionsbereich $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Beispiele:
Die Funktionen $f(x) = x^n$ für ungerades n, $f(x) = 7x^5 + 4x^3 - 12x$ und $\sin x$ sind ungerade.

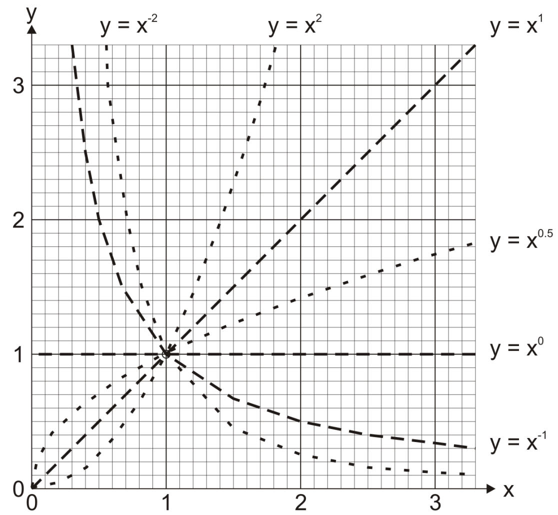
3.2 Potenz- und Wurzelfunktionen

Weil a^b nicht für beliebige reelle Zahlen a und b definiert ist, a^b aber immer genau einer reellen Zahl entspricht, falls $a > 0$ gilt, schränken wir den Definitionsbereich der folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ ein.

Definition:
Eine Funktion $x \mapsto x^p$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$ heisst *Potenzfunktion*. (Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt[p]{x}$ entspricht der Potenzfunktion $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ und wird nicht speziell behandelt.)

Die Graphen sämtlicher Potenzfunktionen $x \mapsto x^p$ gehen durch den Punkt $(1, 1)$. Spezielle Beachtung verdienen die Potenzfunktionen für die folgenden Werte von p:

1. Intervall $-\infty < p < -1$: Grosse y-Werte für kleine x-Werte und umgekehrt.
2. Wert $p = -1$: Das ist die Hyperbel.
3. Intervall $-1 < p < 0$: Grosse y-Werte für kleine x-Werte und umgekehrt.
4. Wert $p = 0$: Die konstante Funktion $y = 1$.
5. Intervall $0 < p < 1$: Der Graph steigt bei 0 schnell an und flacht langsam ab.
6. Wert $p = +1$: Das ist die Winkelhalbierende der Achsen.
7. Intervall $+1 < p < +\infty$: Der Graph steigt für $x > 1$ immer stärker an.



Wegen der Restriktion $x \in \mathbb{R}_+$ ist auch $x^p \in \mathbb{R}_+$. Die Graphen von $x \mapsto x^p$ und $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ gehen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden zwischen der x- und der y-Achse ineinander über.

Wenn die Graphen zweier Funktionen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden zwischen der x- und der y-Achse ineinander übergehen, so nennt man die eine Funktion die *Umkehrfunktion* der anderen. Anders ausgedrückt ist die Funktion f die Umkehrfunktion der Funktion g, wenn $f(g(x)) = x$ für alle Werte von x im Definitionsbereich von g gilt.

Beispiele:
Die Funktion $x \mapsto x - 1$ ist die Umkehrfunktion von $x \mapsto x + 1$, $x \mapsto \frac{x}{3}$ die Umkehrfunktion von $x \mapsto 3x$ und $x \mapsto x^2$ die Umkehrfunktion von $x \mapsto \sqrt{x}$.

3.3 Binomische Gleichungen und negative Basen

Die Funktion $x \mapsto x^p$ ist nur für $x > 0$ definiert. Trotzdem haben binomische Gleichungen der Form $x^p = a$ manchmal mehr als nur eine Lösung. So sind $-\sqrt{9} = -3$ und $+\sqrt{9} = +3$ die beiden Lösungen der Gleichung $x^2 = 9$. Will man beide Lösungen dieser Gleichung in platzsparender Form zeigen, benutzt man auch $x = \pm\sqrt{9}$.

Man schreibt auch manchmal für $a > 0$ den Term $(-a)^p$ auf. Fälle mit negativen Basen müssen jedoch genau untersucht werden, ob sie überhaupt sinnvoll sind. Am besten formt man $(-a)^p$ mit den Potenzgesetzen in $(-1)^p \cdot a^p$ um und untersucht $(-1)^p$ genauer.

Beispiele:
Für ganzzahlige p ist $(-1)^p = 1$, falls p gerade ist, und $(-1)^p = -1$, falls p ungerade ist. Für $p = \frac{1}{2}$ ist $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ (innerhalb der reellen Zahlen) nicht definiert, während für $p = \frac{1}{3}$ wegen $(-1)^3 = -1$ auch $(-1)^{\frac{1}{3}} = -1$ gilt.

Die binomische Gleichung $x^p = a$ lässt sich durch $\left(x^p\right)^{\frac{1}{p}} = x = a^{\frac{1}{p}}$ lösen. Falls man auch an Lösungen interessiert ist, die negativen x-Werten entsprechen, beachte man die obigen Bemerkungen zu negativen Basen.