Mengenlehre

Rainer Hauser

Dezember 2014

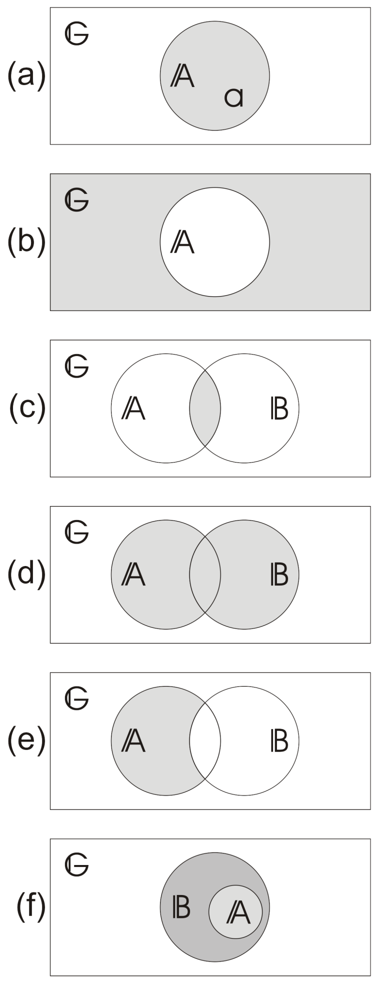
1 Einleitung

1.1 Das Innere und das Äussere

Der mathematische Begriff der *Menge* basiert auf unseren alltäglichen Vorstellungen vom Inneren und Äusseren. Ein Mensch befindet sich im Haus oder draussen, und ein Kieselstein ist im Topf oder nicht. Dabei wird angenommen, dass der Gegenstand immer entweder ganz im Behälter ist oder ganz ausserhalb. Von der Tatsache, dass eine Person ein Haus verlassen kann und sich somit mit einem Fuss noch im Haus drinnen, mit dem anderen Fuss aber bereits draussen befindet, wird abstrahiert.

1.2 Intuitives Konzept einer Kollektion

Der mathematische Begriff der *Menge* basiert auch auf unserem intuitiven Konzept von einer Kollektion von Dingen. Wir können von allen Menschen sprechen, als wäre die Menschheit als Gesamtheit aller Menschen ein Objekt. Dass diese Vorstellung nicht ganz unproblematisch ist, zeigt sich am Begriff der Universalie und dem Universalienstreit in der Scholastik sowie am nach Bertrand Russell benannten Paradoxon und dessen Folgen für die mathematische Logik und die Mengenlehre.



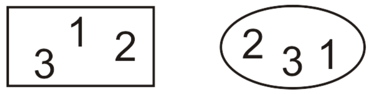
2 Der Begriff Menge

2.1 Definitionen

Eine *Menge* $\mathbb{M}$ ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte heissen *Elemente* von $\mathbb{M}$. Eine Menge kann endlich viele oder unendlich viele Elemente enthalten. Die Menge, die gar keine Elemente enthält, nennt man die *leere Menge* und schreibt dafür entweder $\{\}$ oder $\emptyset$.

Meist schränkt man die Elemente in einem Kontext auf eine *Grundmenge* $\mathbb{G}$ ein. Ist $\mathbb{A}$ eine Menge mit Elementen aus $\mathbb{G}$, und ist a ein Element von $\mathbb{A}$ wie in (a) der nebenstehenden Abbildung gezeigt, so schreibt man $a \in \mathbb{A}$. Die *Ergänzungsmenge* oder *Komplementärmenge* $\overline{\mathbb{A}}$ in (b) besteht aus allen Elementen von $\mathbb{G}$ ohne die Elemente von $\mathbb{A}$. Ist $\mathbb{B}$ eine zweite Menge mit Elementen aus $\mathbb{G}$, so ist $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ in (c) der *Durchschnitt* oder die *Schnittsmenge* und $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ in (d) die *Vereinigung* oder *Vereinigungsmenge* von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$. Die Menge in (e) aller Elemente von $\mathbb{A}$, die nicht zugleich Elemente von $\mathbb{B}$ sind, heisst *Restmenge* $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$ von $\mathbb{A}$ bezüglich $\mathbb{B}$. Sind alle Elemente von $\mathbb{A}$ auch Elemente von $\mathbb{B}$ wie in (f), so ist $\mathbb{A}$ eine *Teilmenge* von $\mathbb{B}$ und man schreibt $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$.

Will man ausdrücken, dass a nicht Element von $\mathbb{A}$ ist, schreibt man $a \notin \mathbb{A}$. Ist $\mathbb{A}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{B}$, so gibt es mindestens ein Element, das in $\mathbb{B}$ aber nicht in $\mathbb{A}$ liegt, und man schreibt dafür $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$. Weil die leere Menge keine Elemente enthält, gilt $\emptyset \subseteq \mathbb{M}$ für jede Menge $\mathbb{M}$. Es gilt sogar $\emptyset \subset \mathbb{M}$, falls $\mathbb{M}$ mindestens ein Element enthält und somit nicht die leere Menge ist.

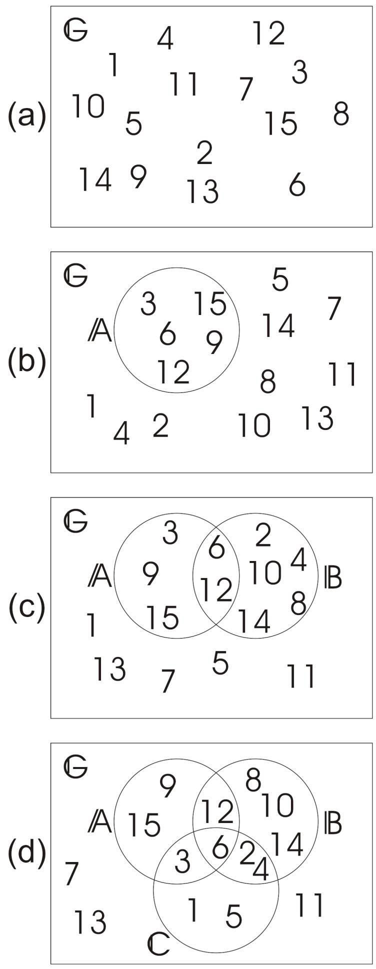


Mengen lassen sich auf verschiedene Weise darstellen. Die Menge $\mathbb{M}$ bestehend aus den natürliichen Zahlen 1, 2 und 3 kann erstens in *Listenform* als $\mathbb{M} = \{1, 2, 3\}$ schreiben, wobei aber die Reihenfolge keine Rolle spielt, sodass auch $\mathbb{M} = \{3, 1, 2\}$ hätte geschrieben werden können. Als Konvention hat sich eingebürgert, dass man die Elemente in der Listenform sortiert auflistet. Eine zweite Form der Darstellung einer Menge ist die in der Abbildung oben gezeigte *graphische Form*, bei der Mengen als Rechtecke oder Ellipsen gezeigt werden. Die dritte Art, in der Mengen beschrieben werden können, ist die *beschreibende Form*, bei der die Elemente durch einen Satz wie "Alle natürlichen Zahlen von eins bis drei" oder als mathematischer Ausdruck wie $\{x \,|\, x = 1 \,\text{oder}\, x = 2 \,\text{oder}\, x = 3\}$ eindeutig festgelegt werden.

2.2 Venn-Diagramme

Hat man mehrere Mengen, so kann ein Element in mehreren davon liegen. Die vielfältigen Möglichkeiten, die sich daraus ergeben, lassen sich für bis zu drei Mengen durch so genannte *Venn-Diagramme* darstellen. Diese Form der graphischen Darstellung für bis zu drei Grössen hat sich auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bewährt.

Die nebenstehende Abbildung zeigt in (a) ein Beispiel mit der Grundmenge $\mathbb{G}$ bestehend aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 15. In dieser Grundmenge sind die drei Mengen $\mathbb{A}$ bestehend aus den durch 3 teilbaren Zahlen, die Menge $\mathbb{B}$ der geraden Zahlen und die Menge $\mathbb{C}$ der Zahlen kleiner als 7 definiert. Es gilt also:
$\mathbb{A} = \{3, 6, 9, 12, 15\}$
$\mathbb{B} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
$\mathbb{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



Die Elemente der Menge $\mathbb{A}$ sind in (b) durch einen Kreis hervorgehoben und die Elemente der Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ sind in (c) durch zwei überlappende Kreise angezeigt. Weil die Zahlen 6 und 12 sowohl durch 3 teilbar wie gerade sind, liegen sie im Überlappungsbereich der beiden Kreise, der $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{6, 12\}$ entspricht. In (d) sind die Elemente aller drei Mengen eingekreist, sodass man sofort sieht, dass die Zahl 12 zu $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$, nicht aber zu $\mathbb{C}$ gehört, während die Zahlen 2 und 4 sowohl zu $\mathbb{B}$ als auch zu $\mathbb{C}$, nicht aber zu $\mathbb{A}$ gehören. Zu allen drei Mengen gehört nur die Zahl 6, sodass man $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C} = \{6\}$ schreiben kann.

Venn-Diagramme erlauben es, die Beziehungen zwischen zwei oder drei Mengen übersichtlich darzustellen. Mit ihrer Hilfe kann man aber auch komplizierte Aufgaben mit Mengen lösen.

2.3 Mächtigkeit

Die *Mächtigkeit* einer Menge $\mathbb{M}$, geschrieben als $|\mathbb{M}|$, ist ihre Grösse, also die Anzahl ihrer Elemente. Die Mächtigkeit ist immer grösser 0 ausser für die leere Menge mit der Mächtigkeit 0. Für $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ gilt $|\mathbb{A}| \leq |\mathbb{B}|$, und für endliche Mengen gilt auch $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ gilt auch $|\mathbb{A}| < |\mathbb{B}|$. Weiter gilt

$$|\mathbb{A}| + |\mathbb{B}| = |\mathbb{A} \cap \mathbb{B}| + |\mathbb{A} \cup \mathbb{B}| \qquad (1)$$

für beliebige Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$, weil die Elemente in beiden Mengen doppelt gezählt werden müssen, wie man sich an einfachen Beispielen überlegen kann.

3 Weiterführende Themen

3.1 Teilmengen einer Menge

Ist eine endliche Menge $\mathbb{M}$ mit Mächtigkeit $|\mathbb{M}|$ gegeben, kann man sich fragen, wie viele verschiedene Teilmengen von dieser Menge gebildet werden können. Es ist offensichtlich, dass die Anzahl möglicher Teilmengen nur von der Mächtigkeit abhängt.

Betrachtet man als Beispiele Mengen mit 0 bis 4 Elementen, so kann man aus der nebenstehenden Aufstellung vermuten, dass sich die Anzahl Teilmengen gemäss Pascal'schem Dreieck verhalten.

0:	1	1 = 1
1:	1 1	1 + 1 = 2
2:	1 2 1	1 + 2 + 1 = 4
3:	1 3 3 1	1 + 3 + 3 + 1 = 8
4:	1 4 6 4 1	1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16

Sei also $\mathbb{M} = \{a, b, c, d\}$ mit $|\mathbb{M}| = 4$, so gibt es die eine Teilmenge $\{\}$ mit keinem Element, die vier Teilmengen $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ mit einem Element, die sechs Teilmengen $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ mit zwei Elementen, die vier Teilmengen $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mit drei Elementen und die eine Teilmenge $\{a, b, c, d\}$ mit vier Elementen.

Für Mengen mit bis zu 10 Elementen findet man die entsprechenden Zahlen in:

```
                                        1
                                    1       1
                                1       2       1
                            1       3       3       1
                        1       4       6       4       1
                    1       5      10      10       5       1
                1       6      15      20      15       6       1
            1       7      21      35      35      21       7       1
        1       8      28      56      70      56      28       8       1
    1       9      36      84     126     126      84      36       9       1
1      10      45     120     210     252     210     120      45      10       1
```

Eine Menge mit 10 Elementen hat also 45 Teilmengen mit zwei und 120 Teilmengen mit drei Elementen.

Ist m die Mächtigkeit der Menge $\mathbb{M}$, so gibt es für $0 \leq k \leq m$ gleiche viele Teilmengen von $\mathbb{M}$ mit k wie Teilmengen von $\mathbb{M}$ mit $m - k$ Elementen. Jede Teilmenge von $\mathbb{M}$ teilt $\mathbb{M}$ in die zwei Teile der Elemente, die zur Teilmenge gehören, beziehungsweise die nicht dazu gehören.

3.2 Unendliche Mengen

Endliche Mengen lassen sich immer in Listenform vollständig aufzählen, auch wenn das für grosse Mengen wie die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 000 000 nicht mehr praktikabel ist. Für unendliche Mengen gilt das jedoch offensichtlich nicht mehr. Trotzdem werden in der Mathematik immer auch unendliche Mengen benutzt.

Bekannteste Beispiele für unendliche Mengen in der Mathematik sind diejenigen Mengen von Zahlen, die ein eigenes Symbol bekommen haben. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen als einfachste unendliche Menge besteht aus allen Zahlen, die man von 1 aus durch jeweiliges Hinzuzählen von 1 erreichen kann. Das sind also die Zahlen 1, 2 (als $1 + 1$), 3 (als $2 + 1$) und so weiter. Manchmal schreibt man deshalb $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Will man erreichen, dass zwei beliebige natürliche Zahlen voneinander subtrahiert werden können, braucht man auch negative Zahlen und erhält so die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, für die man manchmal auch $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ schreibt. Soll die Division von zwei Zahlen (ausser 0 als Divisor) immer möglich sein, so kommen zu den ganzen Zahlen die Brüche, was zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen führt. Ergänzt mit Zahlen wie der Zahl π, die das Verhältnis von Kreisradius und Kreisumfang beschreibt, und der Zahl $\sqrt{2}$, die das Verhältnis von Seitenlänge zu Diagonalenlänge im Quadrat beschreibt, folgen aus den rationalen Zahlen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Erweitert man die reellen Zahlen mit der imaginären Zahl $i = \sqrt{-1}$, bekommt man die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Auch die Mächtigkeit einer unendlichen Menge lässt sich definieren. Echte Teilmengen von unendlichen Mengen können jetzt aber dieselbe Mächtigkeit besitzen wie die ursprüngliche Menge. So ist die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gleich gross wie diejenige der echten Teilmenge der geraden Zahlen in $\mathbb{N}$.

3.3 Gesetze

Neben dem Gesetz (1), das später in der Wahrscheinlichkeitstheorie wichtig ist, gelten noch weitere Gesetze. Für den Durchschnitt und die Vereinigung gelten die *Kommutativgesetze*

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{B} \cap \mathbb{A} \qquad \mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B} \cup \mathbb{A}$$

und die *Assoziativgesetze*

$$(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cap \mathbb{C} = \mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cap \mathbb{C}) \qquad (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \cup \mathbb{C} = \mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \cup \mathbb{C})$$

sodass man einfach unabhängig von der Reihenfolge $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C}$ beziehungsweise $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}$ schreiben darf, wie das bereits oben bei der Behandlung der Venn-Diagramme getan worden ist.

Es gelten auch die *Distributivgesetze*

$$\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{C}) \qquad \mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \cap \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \cap (\mathbb{A} \cup \mathbb{C})$$

für Mengen.

3.4 Kartesisches Produkt

Das *kartesische Produkt* von zwei Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ wird als $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ geschrieben und ist definiert als die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in \mathbb{A}$ und $b \in \mathbb{B}$. Für die Mächtigkeit gilt $|\mathbb{A} \times \mathbb{B}| = |\mathbb{A}| \cdot |\mathbb{B}|$.

Beispiel:
Ist $\mathbb{A} = \{a, b, c\}$ und $\mathbb{B} = \{1, 2\}$, so ist $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

Das kartesische Produkt ist mit dem kartesischen Koordinatensystem verwandt. Mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ besteht die Menge aller Koordinaten (x, y) aus allen Elementen der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Beispiel:
Die 64 Felder auf dem Schachbrett werden nicht einfach nummeriert, sondern durch die Elemente des kartesischen Produkts $\{\mathrm{a, b, c, d, e, f, g, h}\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ adressiert. Statt mit $(\mathrm{c}, 4)$ bezeichnet man das entsprechende Feld einfach mit c4. Der Schachzug, bei dem der Läufer, der jetzt auf dem Feld e6 steht, sich zum Feld c4 bewegt, schreibt man Le6-c4 oder kurz als Lc4, wobei das L den Läufer kennzeichnet. Diese Adressierung hat den Vorteil, dass man die beiden Richtungen, in der sich ein Turm bewegen kann, unabhängig voneinander ansprechen kann. In einem Zug kann ein Turm nur eine der beiden Koordinaten ändern, sodass Te6-c4 ein ungültiger Zug sein muss.