Einführung ins Rechnen mit Matrizen

Rainer Hauser

September 2012

1 Einleitung

1.1 Zahlen und Vektoren

Betrachtet man nur die Addition und Subtraktion von zwei Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$ sowie die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$, so ist die Vektorschreibweise eine sparsame Art, drei (allgemeiner n) Operationen zusammenzufassen, indem man die Zahlen untereinander schreibt und in Klammern packt, sodass man das Zeichen für die Operation nur einmal schreiben muss. Die Vektoren – oder genauer Spaltenvektoren – sind aber mathematische Objekte mit einer geometrischen Bedeutung und nicht nur eine ökonomischere Darstellungsweise von Operationen.

1.2 Andere Anordnungen von Zahlen

Statt Zahlen nur in Spalten anzuordnen wie bei Spaltenvektoren, kann man sich vorstellen, andere Anordnungen wie Dreiecke oder Rechtecke zu benutzen. Bei einem Sudoku oder magischen Quadrat beispielsweise ist das eine reine Spielerei, aber beim Pascal'schen Dreieck steckt eine mathematische Bedeutung dahinter, die es uns auf einfache Weise erlaubt, die Binomialkoeffizienten zu berechnen.

Matrizen werden im Folgenden ohne Bezug zu Anwendungen als spezielle Anordnung von Zahlen eingeführt, auf denen gewisse Eigenschaften und Rechenoperationen definiert sind. Ihre mathematische Bedeutung und Nützlichkeit zeigt sich erst im letzten Abschnitt, wo mathematische Probleme mit ihnen behandelt werden. Dort wird einerseits gezeigt, wie man mit Hilfe der Matrizen Gleichungssysteme lösen kann, und werden andererseits die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus hergeleitet.

2 Eigenschaften von Matrizen

2.1 Zeilen, Spalten und Typ

Eine *Matrix* ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen mit m Zeilen und n Spalten. Der *Typ* einer Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist $m \times n$. Ist $m = n$, hat die Matrix also gleich viele Zeilen wie Spalten, heisst die Matrix *quadratisch*. Die Zahlen, aus denen die Matrix besteht, heissen *Elemente* oder *Komponenten*.

Beispiele:
Die Matrix $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ ist vom Typ 2×3, während der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ eine Matrix vom Typ 2×1 ist.

Für Matrizen werden im Folgenden grosse, fett gedruckte Buchstaben wie $\mathbf{A}$ oder $\mathbf{B}$ benutzt. Wenn für eine $(m \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$ die einzelnen Komponenten a_{ij} mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ adressiert werden sollen, ordnet man die Komponenten auf die Weise

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

an. Der erste Index gibt also die Zeile und der zweite die Spalte an.

2.2 Spezielle Matrizen

Eine Matrix, bei der alle Elemente 0 sind, heisst *Nullmatrix*. Nullmatrizen werden allgemein und unabhängig vom Typ mit **0** bezeichnet. Die folgenden Matrizen sind Beispiele:
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente 0 sind ausser den Zahlen 1 in der Diagonalen von links oben nach rechts unten, heisst *Einheitsmatrix* und wird ebenfalls unabhängig vom Typ mit **I** bezeichnet. Für Einheitsmatrizen gilt $m = n$, $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $a_{ij} = 1$ für $i = j$. Die (2×2)- und die (3×3)-Einheitsmatrizen sind:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.3 Einfache Rechenoperationen

Analog zur Addition und Subtraktion von Vektoren sowie der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar werden auch Addition und Subtraktion bei Matrizen sowie Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl komponentenweise durchgeführt:
Ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$, so ist

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \text{ und } r \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} & \dots & r \cdot a_{1n} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} & \dots & r \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r \cdot a_{m1} & r \cdot a_{m2} & \dots & r \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Subtraktion $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ist analog definiert, kann aber auch auf $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1) \cdot \mathbf{B}$ zurückgeführt werden. Damit zwei Matrizen addiert oder subtrahiert werden können, müssen sie vom gleichen Typ sein.

Beispiel:
Mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ist $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3 Matrixmultiplikation

3.1 Produkt

Für die $(k \times m)$-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix}$ und die $(m \times n)$-Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$
ist eine weitere Operation definiert, die *Matrixmultiplikation* heisst. Ähnlich wie das Skalarprodukt in der Vektorrechnung ist die Matrixmultiplikation eine weitere Operation neben der komponentenweisen Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einer Zahl. Sie ist nur definiert, wenn die Anzahl Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl Zeilen des zweiten Faktors ist.

Hat die $(k \times m)$-Matrix $\mathbf{A}$ die Komponenten a_{ij} und die $(m \times n)$-Matrix $\mathbf{B}$ die Komponenten b_{ij}, so ist die Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ mit den Komponenten c_{ij} vom Typ $k \times n$. Für ihre Komponenten gilt $c_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{m} a_{il} \cdot b_{lj}$ wie in der nebenstehenden Abbildung angedeutet.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \boxed{c_{ij}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & \dots & \dots & \dots & c_{kn} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \\ 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 & 0 \cdot 7 + (-2) \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 7 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 27 \\ -4 & -12 \\ 9 & 31 \end{pmatrix}$$

Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ. Wenn nicht beide vom gleichen quadratischen Typ sind, ist sogar mindestens eines der beiden Produkte gar nicht definiert, weil die Typen nicht zusammenpassen. Für jede Matrix $\mathbf{A}$ gilt aber $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ für Nullmatrizen beziehungsweise Einheitsmatrizen von passendem Typ. Die Null- und Einheitsmatrizen spielen unter den Matrizen also eine ähnliche Rolle wie die 0 und 1 bei den reellen Zahlen.

Wie üblich bei Produkten schreibt man auch bei der Matrixmultiplikation meist einfach $\mathbf{AB}$ statt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{A}^2$ statt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$. Potenzen sind offensichtlich nur für quadratische Matrizen möglich. Für sämtliche Einheitsmatrizen, die ja per Definition quadratisch sind, gilt $\mathbf{I}^n = \mathbf{I}$ für beliebige Potenzen $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Transponierte Matrix

Spiegelt man die $(m \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$ an der Diagonalen, die von links oben nach rechts unten führt, so entsteht eine $(n \times m)$-Matrix, die *transponierte* Matrix heisst und mit $\mathbf{A}^\mathrm{T}$ bezeichnet wird. Gilt in Komponenten $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, so ist $\mathbf{A}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ allgemein. Aus der (3×2)-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ entsteht beispielsweise die (2×3)-Matrix $\mathbf{A}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$.

Beispiel:

Ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, so ist $\mathbf{A}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, und ist $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, so ist $\mathbf{B}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Aus einem Spaltenvektor wird somit ein Zeilenvektor, sodass man das Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ als Matrixmultiplikation $\mathbf{V}^\mathrm{T}\mathbf{W}$ bekommt. Es gibt aber auch Matrizen wie beispielsweise die Einheitsmatrix, die durch Transponieren in sich selber übergehen, und die man *symmetrisch* nennt.

3.3 Inverse Matrix

Für gewisse quadratische Matrizen $\mathbf{A}$ existiert eine Matrix $\mathbf{B}$ vom gleichen Typ, sodass $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ gilt. Man nennt diese Matrix *inverse* Matrix von $\mathbf{A}$ und bezeichnet sie mit $\mathbf{A}^{-1}$. Für die inverse Matrix gilt $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, falls sie existiert.

Unter den $(n \times n)$-Matrizen für eine feste Zahl n spielt die Nullmatrix die Rolle der Null, die Einheitsmatrix die Rolle der Eins, und die inverse Matrix die Rolle des Kehrwertes, wenn man Matrizen mit den reellen Zahlen vergleicht. Im Unterschied zu diesen gibt es aber bei den Matrizen noch andere Matrizen als die Nullmatrix, für die keine inverse Matrix existiert.

Beispiel:

Für die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gibt es keine inversen Matrizen.

Es gibt ein einfaches Kriterium, um festzustellen, ob es für eine Matrix eine inverse Matrix gibt.

3.4 Determinante

Die inverse Matrix einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ existiert genau dann, wenn die *Determinante* der Matrix, die mit $|\mathbf{A}|$ bezeichnet wird, ungleich Null ist. Die Determinante ist zwar für alle quadratischen Matrizen definiert, soll hier aber nur für Matrizen vom Typ 2×2 und 3×3 eingeführt werden.

Ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, so ist $|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Wie man leicht nachrechnen kann, ist die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Beispiel:
Die Determinante von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist $1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$ und diejenige von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist $1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$.

Ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, so ist $|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| + a_{12} \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{pmatrix} \right| + a_{13} \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \right| =$
$a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) + a_{12} \cdot (a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{33}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$.

4 Anwendungen

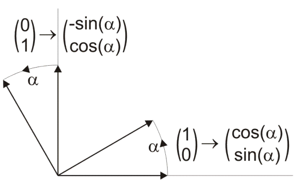
4.1 Gleichungssysteme

Ist ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten gegeben, so lässt es sich in die Form $\mathbf{MX} = \mathbf{P}$ bringen. Multipliziert man jetzt beide Seiten der Gleichung $\mathbf{MX} = \mathbf{P}$ mit $\mathbf{M}^{-1}$, so bekommt man $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{MX} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}$ und somit $\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}$ wegen $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}$ und $\mathbf{IX} = \mathbf{X}$.

Beispiel:
Das Gleichungssystem $\left| \begin{matrix} 4x + 3y = 10 \\ -x + 2y = 3 \end{matrix} \right|$ kann als $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ geschrieben werden, wobei die Koeffizienten links vom Gleichheitszeichen in $\mathbf{M}$, die Unbekannten in $\mathbf{X}$ und die Zahlen rechts vom Gleichheitszeichen in $\mathbf{P}$ gefasst sind. Kennt man $\mathbf{M}^{-1}$, so kann man mit $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}$ die Lösung finden. Nach der obigen Formel ist $\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Multipliziert man das mit $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ bekommt man $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und somit ist $x = 1$ und $y = 2$ die Lösung des Gleichungssystems.

4.2 Drehungen

Matrizen werden nicht nur zum Lösen von Gleichungssystemen benutzt, sondern stellen auch so genannte lineare Abbildungen in Vektorräumen dar. Dies kann einfach am Beispiel der Drehung eines Vektors um den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn gezeigt werden.



Dreht man den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ um α, so bekommt man den Vektor $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$, und dreht man $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ um denselben Winkel, bekommt man $\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt. Allgemein gilt für einen Vektor $\mathbf{V}$ vor und $\mathbf{V}'$ nach der Drehung um den Winkel α die Beziehung $\mathbf{V}' = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{V}$ mit der Drehmatrix $\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Es gelten zudem die Beziehungen $\mathbf{R}_{-\alpha} = \mathbf{R}_\alpha^{-1} = \mathbf{R}_\alpha^{\mathrm{T}}$.

Dreht man einen Vektor erst mit $\mathbf{R}_\alpha$ um α und anschliessend mit $\mathbf{R}_\beta$ um β, so ist das Ergebnis dasselbe wie eine Drehung mit $\mathbf{R}_{\alpha+\beta}$ um den Winkel $\alpha + \beta$. Es gilt also $\mathbf{R}_{\alpha+\beta} = \mathbf{R}_\beta \mathbf{R}_\alpha$ oder in Komponenten $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix}$, womit man mit der Matrixmultiplikation die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus gefunden hat.