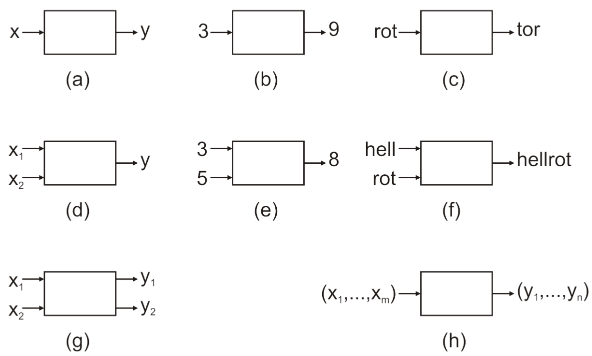
Lineare Funktionen und Proportionalität

Rainer Hauser

Dezember 2013

1 Allgemeine Funktionen

1.1 Blackboxmodell einer Funktion



Eine *Funktion* liefert für Eingabewerte x, die man ihr gibt, Ausgabewerte y. Man kann eine Funktion als Blackbox betrachten. Gibt man etwas rein, kommt etwas raus. Die nebenstehende Abbildung zeigt in (a) so eine Blackbox mit x als Eingabewert und y als Ausgabewert. Nimmt man beispielsweise an, dass die Blackbox als x eine Zahl annimmt und deren Quadrat als y zurückgibt, so sähe das für $x = 3$ aus wie in (b). Weder die Eingabe- noch die Ausgabewerte müssen notwendigerweise Zahlen sein, obwohl man in der Mathematik meist nummerische Funktionen hat. In (c) ist eine Funktion gezeigt, die als Eingabe ein Wort nimmt und als Ausgabe das Eingabewort rückwärts gelesen zurückgibt. Eine Funktion kann auch zwei oder mehr Eingabewerte haben wie in (d) gezeigt. Das Beispiel in (e) gibt die Summe der beiden Eingabewerte als Resultat zurück, während das Beispiel in (f) die beiden Eingabewörter zusammengesetzt ausspuckt. Grundsätzlich kann eine Funktion nicht nur zwei oder mehr Eingabewerte, sondern auch zwei oder mehr Ausgabewerte haben wie in (g) gezeigt. Weil es jedoch konzeptuell keinen Unterschied macht, ob man einer Funktion zwei Werte einzeln oder als geordnetes Paar übergibt, gibt man im allgemeinsten Fall m Eingabewerte als so genanntes m-Tupel und n Ausgabewerte als n-Tupel an. Ein 2-Tupel nennt man Paar und ein 3-Tupel nennt man Tripel.

Ist eine Funktion als Blackbox gegeben, so gibt man ihr etwas als Eingabe und bekommt etwas als Ausgabe. Ein Getränkeautomat, bei dem man als Eingabe Münzen einwirft und als Ausgabe eine Getränkeflasche bekommt, ist so betrachtet auch eine Funktion, wobei man genügend Münzen als Eingabe füttern muss, um zu einem Getränk zu kommen. Man sagt in diesem Fall, der *Definitionsbereich* des Getränkeautomaten seien Münzen, die zusammen den Preis für eine Flasche ergeben. In den Beispielen (b) und (e) ist der Definitionsbereich Zahlen, während er bei den Beispielen (c) und (f) die Menge der Wörter ist. Im Folgenden betrachten wir nur noch Funktionen, bei denen der Eingabewert eine Zahl und der Ausgabewert ebenfalls eine Zahl ist. Die Definitionsbereiche sind also entweder die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder Teilmengen davon.

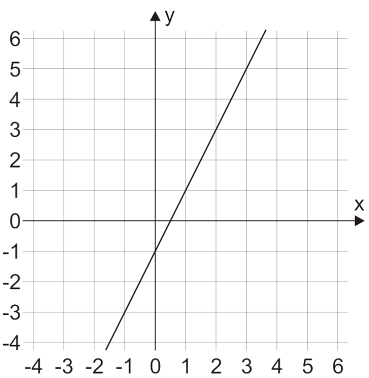
1.2 Spezielle Funktionen

Ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal für Funktionen ist, ob sie für die gleichen Eingabewerte immer die gleichen Ausgabewerte oder aber verschiedene Ausgabewerte liefern. Eine Funktion, die für dieselben Eingabewerte verschiedene Ausgabewerte ausgibt, nennt man eine *Zufallsfunktion*. Sitzt beispielsweise in einer Blackbox eine Person, die für den Eingabewert $n \in \mathbb{N}$ mit einem Würfel n-mal würfelt und die Summe der Augenzahlen von diesen n Würfen als Ausgabewert zurückgibt, so ist das eine Zufallsfunktion, die beispielsweise für den Eingabewert 1 einmal 5 und einmal 2 ausspuckt. Zufallsfunktionen werden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt, sodass im Folgenden nur Funktionen betrachtet werden sollen, die für die gleichen Eingabewerte immer die gleichen Ausgabewerte liefern.

Ist der Definitionsbereich einer Funktion endlich, so lässt sich die Funktion vollständig aufzählen. In diesem Fall spricht man von *endlichen* Funktionen. Weil die beiden Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ beide unendlich gross sind, lassen sich Funktionen, die auf ganz $\mathbb{N}$ oder ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, nicht vollständig aufzählen und müssen durch eine Vorschrift festgelegt werden.

Liefert eine Funktion für jeden Eingabewert denselben Ausgabewert, so spricht man von einer *konstanten Funktion*. Die konstanten Funktionen, für die man $y = a$ schreiben kann, wobei a der konstante Ausgabewert ist, ist die einfachste *Polynomfunktion*, die aus einer endlichen Menge von Summanden der Form $a_i x^i$ bestehen. Die nach den konstanten Funktionen einfachsten Gruppen von Polynomfunktionen sind die *linearen Funktionen* der Form $y = ax + b$ gefolgt von den *quadratischen Funktionen* der Form $y = ax^2 + bx + c$ und den *kubischen Funktionen* der Form $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1.3 Darstellung von Funktionen



Weil eine Funktion Eingabewerte aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ akzeptiert und Ausgabewerte aus den Wertebereich $\mathbb{W}$ ausgibt, schreibt man $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{W}, x \mapsto f(x)$ für eine Funktion, der man den Namen f gegeben hat. Mit x als Eingabewert und $y = f(x)$ als Ausgabewert kann man eine Funktion in einem Koordinatensystem darstellen, indem man für alle möglichen x-Werte die zugehörigen y-Werte bestimmt und den Punkt (x, y) im Koordinatensystem einträgt. Der Menge der so entstehenden (x, y)-Punkte nennt man den *Graphen* der Funktion.

Beispiel:
In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der linearen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 2x - 1$ gezeigt. Es ist eine Gerade, die durch die Punkte $(0, -1)$ und $(1, 1)$ geht. Wie unten gezeigt wird, ist der Graph jeder linearen Funktion eine Gerade.

Funktionen können also algebraisch durch einen Term oder geometrisch durch einen Graphen angegeben werden. Könnte man Punkte in einem Koordinatensystem exakt bestimmen, wäre die algebraische und die geometrische Darstellung gleichwertig. Weil die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen aber immer durch die Strichdicke beschränkt ist, während der algebraische Term wenigstens theoretisch auf beliebig viele Stellen nach dem Komma berechnet werden kann, ist ein algebraischer Term meist vorzuziehen.

2 Proportionalität

2.1 Direkte Proportionalität

Wenn ein Ei im Lebensmittelgeschäft 60 Rappen kostet, und wenn man keinen Mengenrabatt bekommt, kann man annehmen, dass zwei Eier 1.20 und zehn Eier 6 Franken kosten. Wenn man also weiss, dass vier Eier 2.40 kosten, und man sieben Eier kaufen möchte, kann man den Preis von vier Eiern erst durch 4 teilen, um den Preis für ein Ei zu bekommen, und anschliessend den Preis für ein Ei mit 7 multiplizieren, um den Preis für sieben Eier zu berechnen. Das ist ein typischer Dreisatz. Man kann aber diese beiden Schritte zu einem Schritt zusammenfassen und den Preis für vier Eier direkt mit $\frac{7}{4}$ multiplizieren, um den Preis für sieben Eier zu erhalten. Das heisst also, dass man den Preis mit demselben Faktor multiplizieren muss wie die Anzahl, wie das in der nebenstehenden Abbildung gezeigt ist. Sind zwei Grössen wie hier die Anzahl Eier und deren Preis auf diese Weise miteinander verbunden, spricht man von einer *direkten Proportionalität*.

Eier	Preis
1	0.60
2	1.20
3	1.80
4	2.40
5	3.00
6	3.60
7	4.20
...	...

Sind zwei Grössen x und y proportional, so ist das Verhältnis $y : x$ für alle möglichen Wertepaare x und y gleich. Im Beispiel der Eier kann man einen beliebigen Wert x links in der Tabelle und den dazu gehörigen Wert y rechts in der Tabelle nehmen, und das Verhältnis ist immer gleich 0.6. Man nennt diese konstante Grösse den *Proportionalitätsfaktor*. Ist a der Proportionalitätsfaktor, so gilt somit $y : x = \frac{y}{x} = a$, woraus $y = a \cdot x$ folgt. Daraus folgt aber auch $x = \frac{1}{a} \cdot y$ mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{a}$.

Gilt für eine Funktion $f(x)$ die Beziehung $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ für alle möglichen Werte c, so bilden x und $f(x)$ eine direkte Proportionalität. Das gilt speziell auch für die Abhängigkeit zwischen Menge und Preis. Ist x die Menge und $P(x)$ der Preis einer Ware, so gilt

$$P(y \cdot x) = y \cdot P(x) = x \cdot P(y) \tag{1}$$

für alle x und y. Der Preis für die doppelte Menge ist gleich dem doppelten Preis für die einfache Menge.

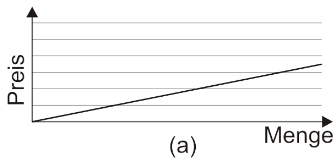
2.2 Umgekehrte Proportionalität

Verhalten sich drei Grössen a, b und c wie $c = a \cdot b$ und hält man eine der beiden Grössen a oder b fest, so sind die anderen beiden Grössen proportional. Hält man hingegen die Grösse c fest, so bilden die beiden Grössen a und b eine *umgekehrte Proportionalität*, die man auch reziproke oder indirekte Proportionalität nennt. Sind a und b umgekehrt proportional, so muss die eine Grösse kleiner werden, wenn die andere grösser wird, und umgekehrt. Ist somit die Beziehung $c = a \cdot b$ gegeben, und ist c konstant, sodass a und b umgekehrt proportional sind, gilt folglich $a = c \cdot \frac{1}{b}$ beziehungsweise $b = c \cdot \frac{1}{a}$.

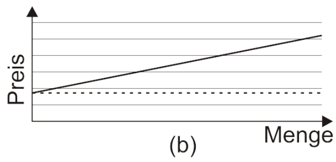
Beispiel:
Für Weg s, Zeit t und Geschwindigkeit v gilt $s = v \cdot t$ wegen $v = \frac{s}{t}$. Bei gegebener fester Geschwindigkeit v als Proportionalitätsfaktor bilden Weg s und Zeit t also eine direkte Proportionalität, denn bei konstanter Geschwindigkeit braucht man für den doppelten Weg die doppelte Zeit. Auch die beiden Grössen Weg s und Geschwindigkeit v sind proportional bei gegebener fester Zeit t, die als Proportionalitätsfaktor dient, denn bei doppelter Geschwindigkeit kommt man in der gleichen Zeit doppelt so weit. Die beiden Grössen Zeit t und Geschwindigkeit v hingegen sind bei fest gegebener Länge des Weges s eine umgekehrte Proportionalität, denn je kleiner die Geschwindigkeit ist, desto länger braucht man für die gleiche Distanz, und je grösser die Geschwindigkeit ist, desto schneller ist man am Ziel.

Beispiel:
Weil für die Fläche F eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b die Beziehung $F = a \cdot b$ gilt, bilden die Fläche und eine Seitenlänge eine Proportionalität mit der anderen, fest gewählten Seitenlänge als Proportionalitätsfaktor. Hält man hingegen die Fläche F fest, bilden die beiden Seitenlängen eine umgekehrte Proportionalität, denn je länger man die eine Seite wählt, desto kürzer muss man die andere Seite wählen, damit die Fläche konstant bleibt.

2.3 Kostenfunktionen



(a)



(b)

Wie am Beispiel der Eier gezeigt bilden die Anzahl eines Artikels und der Gesamtpreis eine direkte Proportionalität mit dem Stückpreis als Proportionalitätsfaktor. Das gilt auch für Waren wie Benzin an einer Tankstelle, die nicht gezählt, sondern gemessen werden, und bei denen der Preis pro Liter die Rolle des Stückpreises spielt. Diesen beiden Beispielen ist wegen $P(0 \cdot x) = 0 \cdot P(x)$ gemeinsam, dass der Preis für gar keine Ware gleich Null ist, denn man muss nichts bezahlen, wenn man nichts kauft.

Neben solchen Kostenfunktionen wie in (a) der nebenstehenden Abbildung gezeigt gibt es aber auch andere wie die in (b) gezeigte Kostenfunktion beispielsweise für ein Mobiltelefon, bei dem zu den variablen Kosten proportional zur bezogenen Menge von Gesprächsminuten eine Grundgebühr dazu kommt, die man bezahlen muss, auch wenn man gar nie telefoniert hat. Die monatliche Telefonrechnung besteht aus einem *fixen* Teil der Kosten für die Grundgebühr, die jeden Monat gleich ist, und einem *variablen* Teil der Kosten für die Gesprächsminuten, die sich von Monat zu Monat ändern können.

2.4 Aufgaben

Aufgabe 1

Wie viel kosten 350 Gramm Käse, wenn 200 Gramm 4.80 kosten?

Aufgabe 2

Wie sieht die Formel für den Preis $P(x)$ aus, wenn (a) $P(1) = 1.3$ oder (b) $P(1) = k$ ist?

Aufgabe 3

Ein Radfahrer fährt 40 Minuten lang mit konstanter Geschwindigkeit und kommt in dieser Zeit 16 Kilometer weit. Wie gross ist seine Geschwindigkeit gemessen in Kilometer pro Stunde?

Aufgabe 4

Der Preis für einen Liter Benzin ist 2.50. Wie sieht die Funktion $P(x)$ für den Preis für x Liter Benzin aus? Und wie sieht die Funktion $M(x)$ für die Menge Benzin aus, die man für x Franken bekommt?

Aufgabe 5

Bestellt man Abzüge von digitalen Fotos bei der Firma PhotoXX, so kostet ein Abzug 13 Rappen. Für Porto und Verpackung wird unabhängig von der Anzahl bestellter Abzüge Fr. 4.50 berechnet. Wie sieht die Preisfunktion $P(n)$ für n Abzüge inklusive Porto und Verpackung aus?

Aufgabe 6

Eine Fabrik produziert Plastikrohre. Die Fixkosten sind Fr. 20 000.– pro Woche, und die Herstellungskosten sind Fr. 12.– pro Meter. Wie viele Meter Rohr müssen bei einem Preis von Fr. 17.– pro Meter jede Woche verkauft werden, damit kein Verlust resultiert?

2.5 Lösungen

Lösung der Aufgabe 1

Weil $350 = \frac{350}{200} \cdot 200 = \frac{7}{4} \cdot 200 = 1.75 \cdot 200$ gilt, ist der Preis für 350 Gramm Käse $4.80 \cdot 1.75 = 8.40$.

Lösung der Aufgabe 2

Aus (1) folgt $P(x) = P(1 \cdot x) = x \cdot P(1)$. Somit gilt für (a) $P(x) = 1.3 \cdot x$ und für (b) $P(x) = k \cdot x$. (Das ist nicht überraschend, denn der Preis für x Stücke einer Ware ist x-mal der Preis für ein Stück, wenn Menge und Preis proportional sind.

Lösung der Aufgabe 3

Wegen $v = \frac{s}{t}$ und $60 = 1.5 \cdot 40$ gilt $v = \frac{16\,\text{km}}{40\,\text{min}} = \frac{1.5 \cdot 16\,\text{km}}{1.5 \cdot 40\,\text{min}} = \frac{24\,\text{km}}{60\,\text{min}} = 24\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Lösung der Aufgabe 4

Bekommt man einen Liter Benzin für 2.50, so bekommt man für einen Franken 0.4 Liter Benzin. Es gilt somit $P(x) = 2.5 \cdot x$ für den Preis von x Liter und $M(x) = 0.4 \cdot x$ für die Menge Benzin, die man für x Franken bekommt.

Lösung der Aufgabe 5

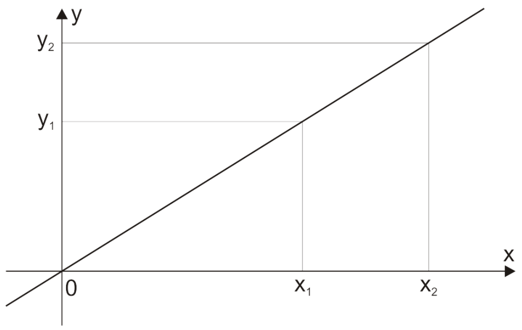
Ein Abzug kostet 0.13 und n Abzüge kosten somit $n \cdot 0.13$. Weil noch der feste Betrag für Porto und Verpackung dazu kommt, ist die Funktion für den Preis also $P(n) = n \cdot 0.13 + 4.50$.

Lösung der Aufgabe 6

Wenn die Firma pro Meter Fr. 5.– verdient und damit die Fixkosten von Fr. 20 000.– decken muss, resultiert kein Verlust, wenn 4000 Meter Rohr verkauft werden.
Das Resultat kann man auch mit einer Gleichung bekommen. Wenn die Firma x Meter Rohr verkauft, sind die Kosten $20000 + 12x$ und die Einnahmen $17x$. Damit weder ein Verlust noch ein Gewinn entsteht, muss also $20000 + 12x = 17x$ oder $20000 = 5x$ gelten, woraus ebenfalls $x = 4000$ folgt.

3 Lineare Funktionen

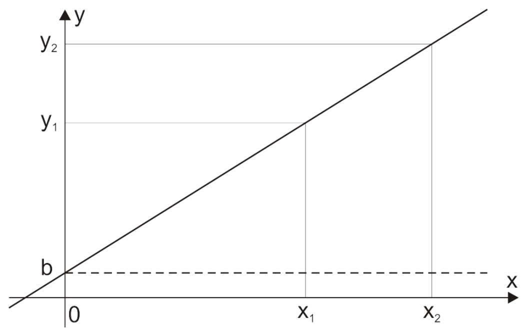
3.1 Geraden in einem Koordinatensystem



Betrachtet man die Gerade im Koordinatensystem, das in der Abbildung links gezeigt ist, so sieht man, dass gemäss Strahlensätzen das Verhältnis der Strecke von 0 bis y_1 zur Strecke von 0 bis x_1 gleich dem Verhältnis der Strecke von 0 bis y_2 zur Strecke von 0 bis x_2 ist. Setzt man $y_1 : x_1 = y_2 : x_2 = a$, so folgt daraus, dass die Werte x_1 und x_2 beliebig gewählt worden sind, die Gleichung $y = a \cdot x$ für alle Paare (x, y), die auf der Geraden liegen.

Geraden in einem Koordinatensystem, die durch den Nullpunkt gehen, können also durch eine Gleichung der Form $y = ax$ dargestellt werden. Die Gleichung $y = 0.3 \cdot x$ zum Beispiel bedeutet alle Paare (x, y) wie etwa $(10, 3)$ und $(0, 0)$, für die diese Gleichung erfüllt ist. Alle Punkte mit den Koordinaten (x, y), welche die Gleichung $y = ax$ erfüllen, liegen also auf einer Geraden, und alle Punkte mit den Koordinaten (x, y), welche diese Gleichung nicht erfüllen, liegen nicht auf dieser Geraden.

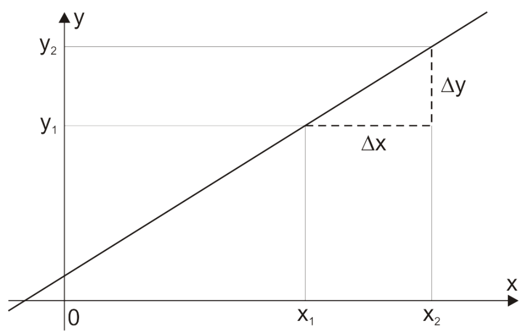
Verschiebt man jeden Punkt einer durch $y = ax$ festgelegten Geraden um b nach oben, bekommt man eine Gerade, die parallel zur ursprünglichen Geraden liegt wie in der Abbildung rechts gezeigt. Alle Punkte auf dieser zweiten Geraden erfüllten die Gleichung $y = ax + b$, denn von der gestrichelten Linie bis zum Punkt auf der Geraden ist die Distanz ax und von der x-Achse bis zur gestrichelten Linie ist die Distanz b. Die gestrichelte Linie ist eine Gerade parallel zur x-Achse. Ist $b > 0$, so liegt sie oberhalb der x-Achse, ist $b < 0$, so liegt sie unterhalb der x-Achse, und ist $b = 0$, so fällt sie mit der x-Achse zusammen.



Jede Funktion, die in der Form $f(x) = ax + b$ geschrieben werden kann, hat als Graphen eine Gerade, und man nennt sie deshalb *lineare Funktionen.* Umgekehrt kann jede Funktion, die als Graphen eine Gerade hat, in der Form $f(x) = ax + b$ geschrieben werden. Das heisst aber nicht, dass jede Gerade in einem Koordinatensystem so dargestellt werden kann, denn die Geraden parallel zur y-Achse sind nicht Graphen einer Funktion, weil eine Funktion jedem x-Wert eindeutig einen y-Wert zuordnet.

3.2 Steigung und y-Achsenabschnitt

Lineare Funktionen können in der Form $f(x) = ax + b$ geschrieben werden und haben Geraden als Graphen, die nicht parallel zur y-Achse sind. Die beiden Grössen a und b haben eine einfache geometrische Bedeutung.



Wählt man zwei verschiedene x-Werte x_1 und x_2, so ist $\Delta y = y_2 - y_1 = (ax_2 - b) - (ax_1 - b) = a(x_2 - x_1) = a\Delta x$ mit $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ und $\Delta x = x_2 - x_1$, woraus

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

folgt. Die Grösse a ist die so genannte *Steigung.*

Wählt man $x_2 = x_1 + 1$, so gilt $\Delta x = 1$ und somit $a = \Delta y$.
Die geometrische Bedeutung der Steigung a kann man also folgendermassen beschreiben. Geht man von einem Punkt auf der Geraden um eine Strecke der Länge 1 nach rechts, so muss man um $|a|$ nach oben

gehen, wenn $a > 0$ ist, beziehungsweise um $|a|$ nach unten gehen, wenn $a < 0$ ist. Ist $a = 0$, so ist die Funktion $f(x) = ax + b = b$ eine konstante Funktion, die somit streng genommen nicht mehr zu den linearen, sondern zu den konstanten Funktionen gehört. Trotzdem betrachtet man auch diese Funktion als lineare Funktion, denn ihr Graph ist ebenfalls eine Gerade, und diese Gerade verläuft parallel zur x-Achse, hat also die Steigung 0.

Wegen $f(0) = b$ liegt der Punkt mit den Koordinaten $(0, b)$ auf dem Graphen der Funktion $f(x) = ax+b$. Der Wert b ist also der Abstand des Schnittpunktes des Graphen von $f(x) = ax + b$ mit der y-Achse und dem Nullpunkt des Koordinatensystems. Ist $b > 0$, so liegt dieser Schnittpunkt oberhalb der x-Achse, ist $b < 0$, so liegt er unterhalb der x-Achse. Die Grösse b heisst *y-Achsenabschnitt*.

3.3 Aufgaben

Aufgabe 7

Gegeben ist die lineare Funktion $y = 0.2x + 3$. Liegen die Punkte mit den Koordinaten $(0, 3)$, $(10, 5)$ und $(2, 4)$ auf dem Graphen von f?

Aufgabe 8

Die Punkte $(1, 4)$ und $(-3, 2)$ liegen auf dem Graphen einer linearen Funktion. Bestimmen Sie die Steigung, den y-Achsenabschnitt und die lineare Funktion.

Aufgabe 9

Der Graph der linearen Funktion $f(x)$ verläuft parallel zum Graphen von $g(x) = 3x - 4$ und geht durch den Punkt mit den Koordinaten $(4, 6)$. Wie sieht $f(x)$ aus?

Aufgabe 10

Bei uns misst man die Temperatur in Grad Celsius, während in Amerika Grad Fahrenheit benutzt werden. Die Umrechnung ist eine lineare Funktion, bei der dem Wert 0° C der Wert 32° F und dem Wert 100° C der Wert 212° F entspricht. Wie lauten die beiden Funktionen, die von Grad Celsius in Grad Fahrenheit beziehungsweise von Grad Fahrenheit in Grad Celsius umrechnen?

3.4 Lösungen

Lösung der Aufgabe 7

Die Punkte $(0, 3)$ und $(10, 5)$ liegen darauf, weil $3 = 0.2 \cdot 0 + 3$ und $5 = 0.2 \cdot 10 + 3$ gilt, die beiden gegebenen Paare (x, y) also $y = 0.2 \cdot x + 3$ erfüllen. Der Punkt $(2, 4)$ liegt hingegen nicht darauf, weil $4 \neq 3.4 = 0.2 \cdot 2 + 3$ gilt.

Lösung der Aufgabe 8

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade, und eine Gerade ist bekanntlich durch zwei Punkte eindeutig bestimmt. Setzt man die x- und y-Werte der beiden gegebenen Punkte in die allgemeine Formel für eine lineare Gleichung ein, so bekommt man die beiden Gleichungen $4 = a \cdot 1 + b$ und $2 = a \cdot (-3) + b$. Löst man dieses Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und den beiden Unbekannten a und b auf, bekommt man die Steigung $a = 0.5$ und den y-Achsenabschnitt $b = 3.5$, woraus $y = 0.5x + 3.5$ folgt.

Lösung der Aufgabe 9

Parallele lineare Funktionen haben die gleiche Steigung, sodass $f(x) = 3x + b$ gelten muss. Weil wegen dem Punkt $(4, 6)$ die Gleichung $6 = 3 \cdot 4 + b$ erfüllt sein muss, gilt $b = -6$ und somit $f(x) = 3x - 6$.

Lösung der Aufgabe 10

Sei $f(x)$ die Funktion, die von Grad Celsius in Grad Fahrenheit umrechnet, so gilt $f(x) = 1.8x + 32$. Sei $c(x)$ die Funktion, die von Grad Fahrenheit in Grad Celsius umrechnet, so gilt $c(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$. (Man beachte, dass $\frac{5}{9} = \frac{1}{1.8}$ ist.)