Koordinatensysteme für präzise Ortsangaben

Rainer Hauser

Juni 2015

1 Einführung

1.1 Ortsangaben im sozialen Umfeld

Wir Menschen möchten manchmal jemandem einen Ort so angeben, dass diese Person den Ort findet, ohne dass wir mitgehen müssen, um den Ort zu zeigen. Das kann im eigenen Haus sein, wenn man seinen Ehepartner bittet, im Vorratskeller an der linken Wand auf dem Gestell im obersten Regal ein Kilogramm Zucker zu holen. Das kann aber auch sein, wenn man seinen Ehepartner bittet, in einem nahegelegenen Geschäft ein Kilogramm Zucker zu kaufen, weil im Vorratskeller kein Zucker mehr zu finden ist.

Nicht nur wir Menschen kommunizieren über Orte, sondern auch Tiere tun das. Bienen teilen durch ihre Tänze ihren Kolleginnen mit, wo sie Honig finden können. Auch Affen sind dabei beobachtet worden, dass sie anderen mitgeteilt haben, wo beispielsweise eine gefährlich Schlange lauert, und Delphine scheinen sich ebenfalls zum Beispiel über fischreiche Gegenden zu unterhalten.

1.2 Adressen als Ortsangaben

Bekannte Orte wie den Vorratskeller kann man mit ihrem Namen benennen. Manchmal möchte man aber auch Orte angeben, die man noch nie gesehen hat. Wenn man in einer Stadt etwa ein bestimmtes Haus eindeutig angeben will, so nennt man die Strasse und die Hausnummer. Die Strasse legt eine überschaubare eindimensionale Teilmenge des Stadtgebietes fest, während die Hausnummer den Punkt darin genau genug bestimmt, um eine Person, die dort im angegebenen Haus wohnt, finden zu können, falls sie gerade zu Hause ist. Auf diese Weise lässt sich grundsätzlich in vielen Ländern jedes Haus und seine Bewohner über die Adresse aufspüren. Man sucht in einer Karte die Strasse und folgt den Hausnummern, die auf der einen Strassenseite gerade und auf der anderen ungerade sind, und die in der einen Richtung zunehmen, während sie in der anderen abnehmen.

1.3 Koordinatensysteme

Adressen mit Ort, Strassenname und Hausnummer helfen nichts, um einen bestimmten Punkt irgendwo weit weg von irgendwelchen Strassen und Häusern anzugeben. Deshalb gibt es Koordinatensysteme. Sie werden definiert, indem man einen festen Ort als Ursprungsort, ein Mass für die Angabe von Abständen und eine geeignete Anzahl messbarer Grössen wie Richtungen oder Winkel festlegt.

Bei den Landeskoordinaten der Schweiz beispielsweise ist der feste Ursprungsort die ehemalige Sternwarte in Bern, das Mass für Distanzen der Meter und die beiden Richtungen sind Nord-Süd und Ost-West. Damit kann jeder Ort in der Schweiz durch zwei Zahlen eindeutig festgelegt werden. Um einerseits die zwei Zahlen nicht verwechseln zu können, und um andererseits auf dem ganzen Gebiet der Schweiz ohne negative Zahlen auszukommen, hat der Ursprungsort in Bern die Koordinaten 600 000 und 200 000.

Weil die Schweiz klein ist im Vergleich zur Erdoberfläche, kann sie als ein Stück Ebene betrachtet und mit ebenen Koordinaten beschrieben werden. Will man aber auf der ganzen Erde jeden Punkt durch zwei Zahlen eindeutig festlegen, so muss man berücksichtigen, dass die Erde kugelförmig ist. Indem man

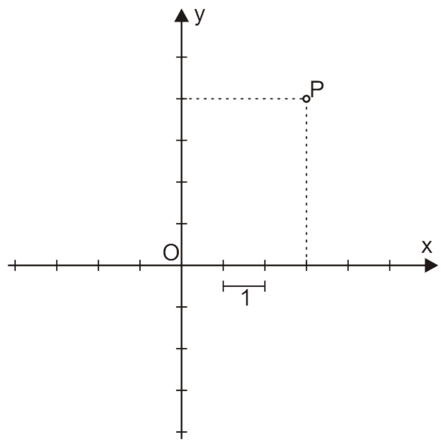
Greenwich in London als Ursprungsort und die Winkel im Gradmass als Längenmass festgelegt hat, geben die Längengrade (geographische Länge) als Verbindungen vom Nord- zum Südpol und die Breitengrade (geographische Breite) als Kreise parallel zum Äquator ein einfaches Koordinatensystem ab.

Wenn in einem Gebiet mehrere Koordinatensysteme definiert sind, möchte man die einen Koordinaten in die anderen umrechnen können. So ist es nützlich, die Landeskoordinaten der Schweiz in Längen- und Breitengrade beziehungsweise umgekehrt konvertieren zu können. Im Folgenden werden sowohl für zweiwie auch für dreidimensionale Räume verschiedene speziell in der Physik gebräuchliche Koordinatensysteme und dazugehörige Koordinatentransformationen angegeben.

2 Zweidimensionale Koordinatensysteme

2.1 Kartesische Koordinaten in der Ebene

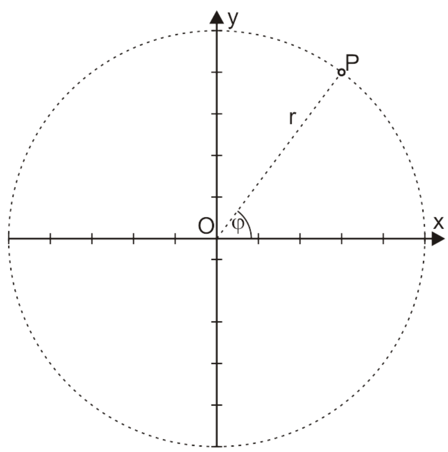
Die bekannteste Art, den genauen Ort von Punkten in einer Ebene festzulegen, ist das kartesische Koordinatensystem. Man wählt einen Nullpunkt O, zwei Richtungen x und y sowie eine Einheitslänge. In der nebenstehenden Abbildung sind die beiden Richtungen als Koordinatenachsen mit dem Nullpunkt O als deren Schnittpunkt eingezeichnet. Auf den Koordinatenachsen sind Markierungen im Abstand der Einheitslänge eingetragen. Dadurch kann man einem beliebigen Punkt P in der Ebene zwei Zahlen als Koordinaten zuordnen. Der Punkt P in der Abbildung hat die Koordinaten $(3, 4)$, denn geht man drei Einheitslängen nach rechts in x-Richtung und vier Einheitslängen nach oben in y-Richtung kommt man zu diesem Punkt. Man kommt zum selben Punkt, wenn man erst in y-Richtung und anschliessend in x-Richtung geht. Die Reihenfolge spielt nur insofern eine Rolle, als die erste Zahl in $(3, 4)$ in x-Richtung und die zweite in y-Richtung führt.



Die Koordinatenachsen müssen nicht unbedingt senkrecht aufeinander stehen wie in der Abbildung. Stehen sie aber senkrecht aufeinander, lassen sich die Abstände zwischen zwei Punkten mit dem Satz von Pythagoras berechnen.

2.2 Polarkoordinaten in der Ebene

Derselbe Punkt P wie bei den kartesischen Koordinaten in der Abbildung oben kann auch mit den zwei Zahlen $(5, 53.13)$ in Polarkoordinaten wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt festgelegt werden. Die erste Zahl ist der Abstand r vom Nullpunkt O und die zweite Zahl der Winkel φ zwischen der x-Achse und der Verbindung $\overline{OP}$, der hier im Gradmass angegeben und auf zwei Stellen nach dem Dezimalpunkt gerundet ist. Jeder Punkt in der Ebene kann so durch die zwei Polarkoordinaten (r, φ) festgelegt werden, wie jeder Punkt in der Ebene durch die zwei kartesischen Koordinaten (x, y) festgelegt werden kann. Während aber Punkt und Zahlenpaar (x, y) bei den kartesischen Koordinaten eineindeutig einander zugeordnet werden können, ist das bei den Polarkoordinaten nicht so. Erstens gilt für den Nullpunkt O, dass nur $r = 0$ eindeutig ist, φ aber nicht eindeutig angegeben werden kann, und zweitens ist φ für alle übrigen Punkte nur bis auf Vielfache von 360° eindeutig bestimmt.



Polarkoordinaten sind dort sinnvoll, wo kreissymmetrische Situationen betrachtet werden. Wirft man beispielsweise einen Stein ins Wasser, entstehen kreisförmige Wellen, die sich ausbreiten. Der Bewegungsablauf dieser Wellen lässt sich in Polarkoordinaten einfacher modellieren als in kartesischen Koordinaten.

Kartesische Koordinaten x und y lassen sich durch die Transformation

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

in Polarkoordinaten r und φ umwandeln. Polarkoordinaten r und φ lassen sich umgekehrt durch

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad y = r \cdot \sin(\varphi) \tag{2}$$

in kartesische Koordinaten x und y transformieren. (Die Funktion $\tan^{-1}$, die man in dieser Schreibweise häufig auf Taschenrechnern findet, heisst bei Mathematikern üblicherweise Arcustangens oder abgekürzt arctan und ist die wegen der Periodizität geeignet eingeschränkte Umkehrfunktion des Tangens.)

Beispiel:
Der Punkt mit den kartesischen Koordinaten $(5, 12)$ hat die Polarkoordinaten $r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ und $\varphi = \tan^{-1}(2.4) \approx 67.380°$ gemäss (1). Rechnet man mit (2) zurück, bekommt man $x = 5$ und $y = 12$ (mit geringfügigen Rundungsfehlern in der fünften Stelle hinter dem Dezimalpunkt wegen dem gerundeten Wert von φ).

2.3 Koordinaten auf der Kugeloberfläche

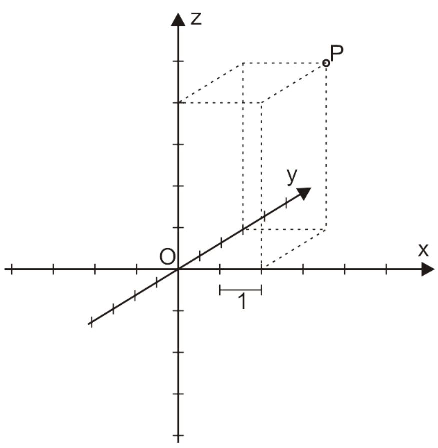
Nicht nur jeden Punkt in einer Ebene, sondern auch jeden Punkt auf einer Kugeloberfläche kann man mit zwei Zahlen eindeutig festlegen. Längen- und Breitengrade auf der Erde, die genügend genau als Kugel betrachtet werden kann, sind ein Beispiel dafür. Die Meridiane (halbe Längenkreise) verbinden den Nordpol und den Südpol. Alle Punkte mit gleichem Längengrad liegen auf dem gleichen Meridian (lateinisch *circulus meridianus* genannt und haben deshalb zur gleichen Zeit Mittag). Die Breitenkreise sind Kreise auf der Erdoberfläche, die parallel zum Äquator liegen. Am Nord- und am Südpol degenerieren die Breitenkreise zu einem Punkt, und alle Meridiane treffen sich dort, sodass man für diese beiden Punkte auf der Erdoberfläche keinen Längengrad angeben kann.

Weil diese Koordinaten den weiter unten besprochenen drei Kugelkoordinaten im Raum entsprechen, wenn man der Koordinate r einen konstanten Wert gibt, werden sie dort besprochen. Aber auch auf der Erde macht es manchmal Sinn als dritte dem Wert r entsprechende Koordinate die Höhe über Meer zu nehmen, sodass man auch Punkte unterhalb und oberhalb der Erdoberfläche angeben kann.

3 Dreidimensionale Koordinatensysteme

3.1 Kartesische Koordinaten im Raum

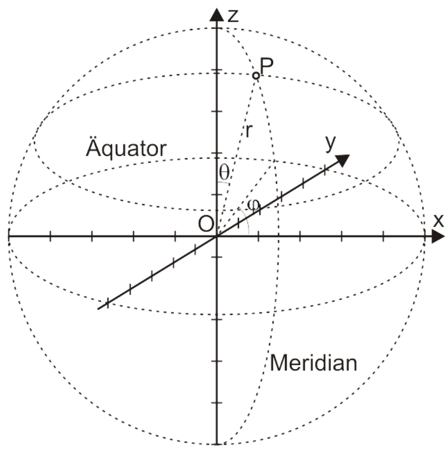
Nimmt man das zweidimensionale kartesische Koordinatensystem und fügt die dritte mit z bezeichnete Koordinatenachse hinzu, die sowohl auf der x-Achse als auch auf der y-Achse senkrecht steht, so hat man ein dreidimensionales Koordinatensystem wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt. Der Punkt P hat darin die Koordinaten $(2, 3, 4)$. Auch hier spielt die Reihenfolge, in der man in die x-, y- und z-Richtung geht keine Rolle, denn solange man zwei Einheitslängen in die x-Richtung, drei Einheitslängen in die y-Richtung und vier Einheitslängen in die z-Richtung geht, kommt man zum Punkt P, wie die verschiedenen als gestrichelte Linien eingezeichneten Wege zeigen.



Wie die x- und y-Achse nicht senkrecht aufeinander stehen müssen, muss auch die z-Achse nicht senkrecht auf den beiden anderen Achsen stehen. Wenn aber alle drei Achsen senkrecht aufeinander stehen, lassen sich Abstände zwischen zwei Punkten mit dem Satz von Pythagoras berechnen.

3.2 Kugelkoordinaten im Raum

Die Kugelkoordinaten legen jeden Punkt P im Raum durch die drei Zahlen r, φ und θ fest. Dabei ist r der Abstand zwischen P und dem Nullpunkt, φ der Winkel zwischen der Projektion von P in die xy-Ebene parallel zur z-Achse und der x-Achse und θ der Winkel zwischen der z-Achse und der Geraden durch den Nullpunkt und durch P. Die beiden Pole sind die Schnittpunkte der z-Achse mit der Kugel mit Radius r, und der Äquator ist der Kreis mit Radius r in der xy-Ebene.



Die Ortsangaben auf der Erdoberfläche mit geographischer Länge und Breite sowie Höhe über dem Meeresspiegel basiert im Wesentlichen auf diesem Konzept. Der Erdmittelpunkt ist der Nullpunkt, Nullmeridian geht durch Greenwich, sodass die Verbindung vom Erdmittelpunkt mit dem Schnittpunkt des Nullmeridians mit dem Äquator die Richtung der x-Achse bestimmt. Im Unterschied zu den Kugelkoordinaten ist die Höhe nicht der Abstand vom Erdmittelpunkt, sondern von der Kugeloberfläche des Meeresspiegels, und der Winkel θ wird nicht vom Nordpol, sondern vom Äquator aus gemessen. Kugeloberflächen mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt sind Flächen mit konstantem r. Meridiane sind auf Kugeloberflächen mit konstantem r Linien mit konstantem φ, und Breitenkreise sind Linien mit konstantem θ.

Kartesische Koordinaten x, y und z lassen sich durch die Transformation

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \tag{3}$$

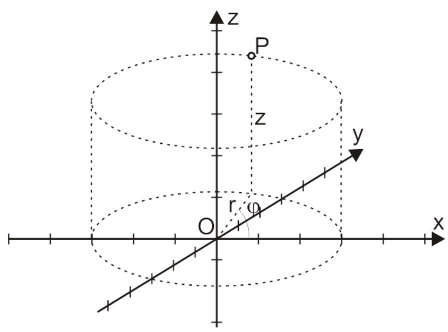
in Polarkoordinaten r, φ und θ umwandeln. Polarkoordinaten r, φ und θ lassen sich durch

$$x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \qquad y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \qquad z = r \cdot \cos(\theta) \tag{4}$$

in kartesische Koordinaten x, y und z transformieren. (Wie der oben erwähnte Arcustangens hat die Funktion $\cos^{-1}$, die man in dieser Schreibweise häufig auf Taschenrechnern findet, bei Mathematikern üblicherweise den Namen Arcuscosinus oder abgekürzt arccos und ist die wegen der Periodizität geeignet eingeschränkte Umkehrfunktion des Cosinus.) Die Berechnungen von r und φ aus den kartesischen Koordinaten im Raum in (3) entsprechen den analogen Berechnungen in (1), während die Formeln für x und y in (4) denjenigen in (2) entsprechen, wobei $r \cdot \sin(\theta)$ die Projektion von r in die xy-Ebene ist.

3.3 Zylinderkoordinaten im Raum

Die Zylinderkoordinaten entsprechen den ebenen Polarkoordinaten für die xy-Ebene ergänzt durch die kartesische z-Achse für die dritte Dimension. Somit bestimmen die Zahlenwerte r, φ und z den Ort eines Punktes P. Alle Punkte mit gleicher Koordinate r liegen auf einem Zylinder mit Radius r, der aber nach oben und unten unbegrenzt ist. Nimmt man wie in der nebenstehenden Abbildung an, die Grundfläche des Zylinders liege in der xy-Ebene und P liege auf dem Rand der Deckfläche, so entspricht die Koordinate z der Zylinderhöhe.



Wegen der Verwandtschaft der Zylinderkoordinaten im Raum mit den Polarkoordinaten in der Ebene lassen sich kartesische Koordinaten x, y und z im Raum offensichtlich durch die Transformation

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad z = z \tag{5}$$

in Zylinderkoordinaten r, φ und z umwandeln. Zylinderkoordinaten r, φ und z lassen sich durch

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad y = r \cdot \sin(\varphi) \qquad z = z \tag{6}$$

in kartesische Koordinaten x, y und z transformieren.