Folgen und Reihen

Rainer Hauser

Februar 2011

1 Einleitung

1.1 Unendliche Prozesse und Approximationen

Zählen ist ein unendlicher Prozess, der theoretisch von 1 über die Nachfolgerfunktion "plus 1" jede natürlich Zahl erreichen kann. Die natürlichen Zahlen können also als unendliche Folge "1, 2, 3, 4, ..." von Zahlen betrachtet werden. Diese Folge wächst streng monoton und ist nach oben unbeschränkt.

Möchte man die rationale Zahl $\frac{1}{3}$ als Dezimalzahl aufschreiben, so ist auch das ein unendlicher Prozess, der von 0.3 zu 0.33, 0.333 und so weiter führt, aber nie abgeschlossen ist. Die Folge "0.3, 0.33, 0.333, ..." ist somit eine unendliche Folge von Zahlen, welche die rationale Zahl $\frac{1}{3}$ beliebig genau approximiert. Diese Folge hat also die Zahl $\frac{1}{3}$ als Grenzwert, dem sie sich beliebig genau annähert.

1.2 Deduktion und Induktion

In der Logik unterscheidet man zwei Arten von Schlüssen. Die *Deduktion* schliesst vom Allgemeinen auf das Spezielle. Die Aristotelischen Syllogismen sind deduktiv. Daraus dass alle Menschen sterblich und alle Griechen Menschen sind, darf man uneingeschränkt schliessen, dass alle Griechen sterblich sind. Die deduktiven Schlüsse sind also immer wahr.

Die *Induktion* auf der anderen Seite schliesst vom Speziellen auf das Allgemeine. Wenn ein kleines Kind lernt, dass der Hund seiner Eltern, der Hund seiner Grosseltern, der Hund der Nachbarn und alle andere Hunde, denen es bisher begegnet ist, lieb und ungefährlich sind, und daraus schliesst, dass alle Hunde lieb und ungefährlich sind, so ist das ein induktiver Schluss, der zu bösen Überraschungen führen kann. Induktive Schlüsse sind zwar unverzichtbar im Alltag und in der Wissenschaft, können aber falsch sein. Immer wahr ist jedoch die *vollständige Induktion*, die weiter unten beschrieben wird.

2 Allgemeine Eigenschaften

2.1 Definition von Folgen und Reihen

Definition:
Eine *Folge* ist eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{M}$, wobei man üblicherweise a_n statt $f(n)$ schreibt. Das Argument n heisst *Index*. Für die ganze Folge schreibt man (a_n) und für das einzelne *Glied* schreibt man a_n. Für das Glied a_n ist a_{n-1} der *Vorgänger* und a_{n+1} der *Nachfolger*. Jedes Glied hat also einen Nachfolger, und jedes Glied ausser dem ersten hat einen Vorgänger. Im Folgenden werden nur *Zahlenfolgen* betrachtet, bei denen die Glieder reelle Zahlen sind, für die also $\mathbb{M} = \mathbb{R}$ gilt.

Um eine unendliche Folge eindeutig festzulegen, braucht es eine *Vorschrift*. Es gibt zwei Arten von Vorschriften:

1. *Explizite Definition:* Man gibt an, wie man das n-te Glied a_n direkt aus Funktionen von n und aus Konstanten berechnen kann. (Beispiel: $a_n = 3n^2 + 2n - 7$)

2. *Rekursive Definition:* Man gibt das erste Glied (oder die ersten Glieder) an und beschreibt, wie man aus dem Vorgänger (oder den Vorgängern) das nächste Glied berechnen kann. (Beispiel: Fibonacci-Zahlen $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$)

Bei einer expliziten Definition kann man jedes beliebige Glied direkt berechnen. Bei einer rekursiven Definition muss man erst die Vorgänger bestimmt haben, bevor man ein Glied berechnen kann. Bei einer rekursiv definierten Folge muss man also erst die Glieder a_1 bis a_{n-1} kennen, um a_n zu bestimmen. (Wenn nicht anders angegeben, hat das erste Glied der Folge den Index 1.)

Definition:
Zu jeder Folge (a_n) gibt es eine Folge (s_n), die durch

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{1}$$

definiert ist. Diese Folge heisst *Reihe*, und das n-te Glied der Reihe (s_n) ist somit die n-te *Teilsumme* der Folge (a_n). (Beispiel: $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + 2 = 3$, $s_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $s_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, ...)

2.2 Monotonie und Beschränktheit

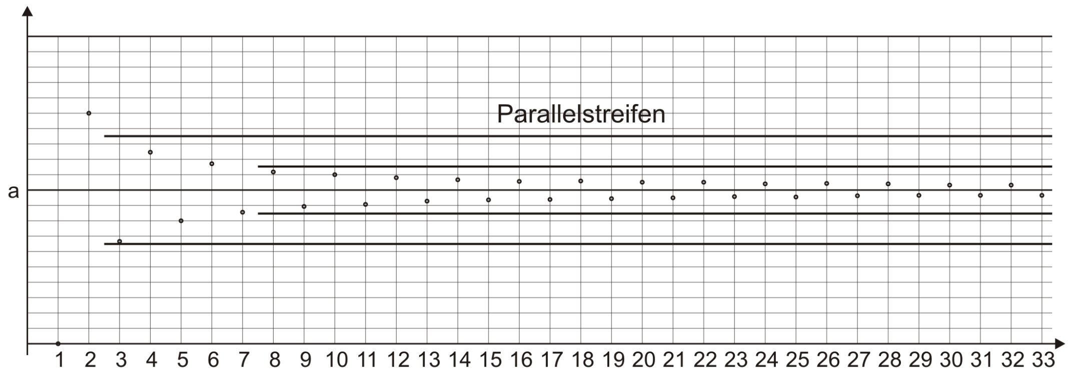
Definition:
Eine Folge (a_n) ist *streng monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle n gilt, ist *monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n gilt, ist *streng monoton fallend*, wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle n gilt, ist *monoton fallend*, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n gilt.

Definition:
Die Zahl S_o heisst *obere Schranke* der Folge (a_n), wenn $S_o \geq a_n$ für alle n gilt. Die Zahl S_u heisst *untere Schranke* der Folge (a_n), wenn $S_u \leq a_n$ für alle n gilt. Hat eine Folge eine obere Schranke, nennt man sie *nach oben beschränkt.* Hat eine Folge eine untere Schranke, nennt man sie *nach unten beschränkt.* Eine nach oben und nach unten beschränkte Folge, heisst *beschränkt.*

Beispiel:
Die durch $a_n = \frac{1}{2^n}$ explizit definierte Folge hat als obere Schranke $S_o = \frac{1}{2}$ und als unteres Schranke $S_u = 0$. (Jede Zahl grösser als 0.5 ist ebenfalls obere Schranke, und jede Zahl kleiner als 0 ist ebenfalls untere Schranke.) Die Folge ist somit beschränkt und zudem auch streng monoton fallend.

2.3 Der Grenzwert

Definition:
Zeichnet man eine Folge graphisch auf, so besteht ein *Parallelstreifen* der Dicke d um den Wert a aus allen Zahlen, die weniger als d von a entfernt sind. In der folgenden Abbildung sind zwei Parallelstreifen um a mit verschiedenen Dicken vom Punkt an eingetragen, ab dem alle Glieder der eingezeichneten Folge innerhalb dieses Parallelstreifens liegen. (Die Parallelstreifen stelle man sich nach rechts bis ins Unendliche fortgesetzt vor.)



Definition:
Gibt es für eine Folge (a_n) zu jedem noch so dünnen Parallelstreifen um den Wert a einen Index, sodass alle Glieder der Folge mit grösserem Index in diesem Parallelstreifen liegen, so nennt man den Wert a den *Grenzwert* der Folge (a_n) und schreibt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \tag{2}$$

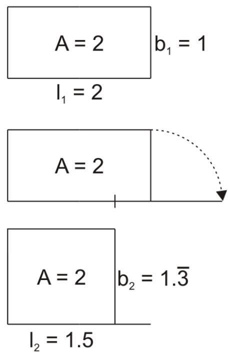
dafür. Hat eine Folge den Grenzwert a, so *konvertiert* sie gegen a und heisst *konvergent.* Hat sie keinen Grenzwert, so *divergiert* sie und heisst *divergent.*

Beispiel:
Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ hat den Grenzwert 0. Im Parallelstreifen zwischen den Zahlen -0.00001 und $+0.00001$ liegen alle Folgenglieder mit Index grösser als 100 000. Im schmaleren Parallelstreifen zwischen -0.000001 und $+0.000001$ liegen alle Folgenglieder mit Index grösser als 1 000 000. So lässt sich für jeden Parallelstreifen um 0, und sei er noch so schmal, immer ein Index finden, sodass alle Glieder mit grösserem Index in diesem Parallelstreifen liegen.

Beispiel:
Die rekursiv definierte Folge

$$l_1 = 2 \quad l_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(l_n + \frac{2}{l_n}\Big)$$

konvergiert gegen $\sqrt{2}$ und stellt somit eine Methode dar, um $\sqrt{2}$ zu approximieren. Sie wird nach dem griechischen Mathematiker Heron *Heron-Verfahren* genannt.



Man beginnt man mit einem Rechteck mit Seitenlängen $l_1 = 2$ und $b_1 = 1$ und Flächeninhalt $A = 2$. In jedem Schritt bestimmt man ein nächstes Rechteck mit Seitenlänge $l_{n+1} = \frac{l_n + b_n}{2}$, dessen Flächeninhalt immer noch $A = 2$ ist, dessen längere Seite aber immer kürzer wird, sodass sich das Rechteck mehr und mehr einem Quadrat annähert.

Satz:
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Zum Beweis genügt es sich zu überlegen, dass nach der Festlegung eines Parallelstreifens, den man irgendwie wählen kann, weil die Folge einen Grenzwert hat, höchstens endlich viele Folgenglieder ausserhalb dieses Parallelstreifens liegen können. Die unendlich vielen Folgenglieder im Parallelstreifen sind durch diesen Parallelstreifen nach oben und unten beschränkt, und die verbleibenden, endlich vielen Glieder haben ein Minimum und ein Maximum.

Satz:
Konvergiert die Folge (a_n) gegen a und die Folge (b_n) gegen b, und ist c eine reelle Zahl, so konvergiert die Folge $(a_n \pm b_n)$ gegen $a \pm b$, die Folge $(a_n \pm c)$ gegen $a \pm c$ und die Folge $(c \cdot a_n)$ gegen $c \cdot a$.

Diese Behauptungen lassen sich leicht beweisen, indem man die Parallelstreifen für die ursprünglichen und abgeleiteten Folgen geeignet wählt. (Die Ausarbeitung sei dem Leser überlassen.)

Beispiel:
Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz sind wichtige Eigenschaften von Folgen, die bewiesen werden müssen, was hier am Beispiel

$$a_n = \frac{3n}{n+1}$$

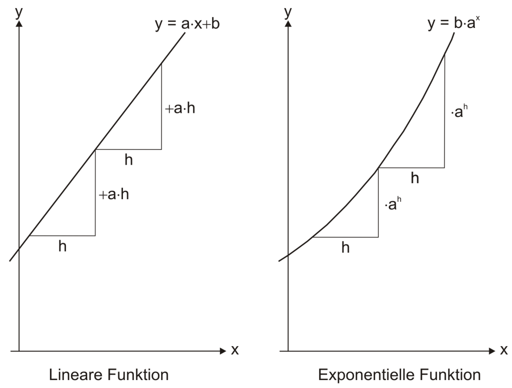
vorgeführt werden sollen. Diese Folge ist streng monoton wachsend, hat eine obere und untere Schranke und konvergiert gegen 3.
Für die strenge Monotonie muss $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt werden. Das heisst $\frac{3(n+1)}{n+2} > \frac{3n}{n+1}$, woraus $(n+1)(3n+3) > (n+2)3n$ und weiter $3n^2 + 6n + 3 > 3n^2 + 6n$ folgt, was für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Weil alle a_n positiv sind, ist 0 sicher eine untere Schranke. Um zu zeigen, dass 3 eine obere Schranke ist, muss man $a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen. Es muss also $\frac{3n}{n+1} \leq 3$ oder $3n \leq 3(n+1) = 3n+3$ gelten, was offensichtlich gilt, sodass $S_o = 3$ eine obere Schranke ist. Die Differenz $S_o - a_n$ ist $3 - \frac{3n}{n+1} = \frac{3(n+1)}{n+1} - \frac{3n}{n+1} = 3 \cdot \frac{1}{n+1}$. Die Folge $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ konvergiert gegen 0, sodass die Folge $\left(3 \cdot \frac{1}{n+1}\right)$ nach obigem Satz ebenfalls nach 0 konvergiert.

Somit ist 3 nicht nur eine obere Schranke der ursprünglichen Folge, sondern die beste aller möglichen oberen Schranken und gleichzeitig auch der Grenzwert, gegen den die Folge konvergiert.

3 Spezielle Folgen und Reihen

3.1 Folgen aus diskret abgetasteten Funktionen

Tastet man eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in gleichen Abständen d ab, so entsteht die Folge $a_1 = f(x_0)$, $a_2 = f(x_0 + d)$, ..., $a_n = f(x_0 + (n-1)d)$. Tastet man so speziell eine lineare Funktion ab, entsteht eine arithmetische Folge, und tastet man auf diese Weise eine exponentielle Funktion ab, entsteht eine geometrische Folge. Bei arithmetischen Folgen gilt $a_{n+1} = a_n + konstanterWert$, und bei geometrischen Folgen gilt $a_{n+1} = a_n \cdot konstanterWert$. Die nebenstehende Abbildung zeigt, weshalb das so ist. Diese beiden Typen von Folgen werden im Folgenden ausführlich besprochen.



3.2 Arithmetische Folgen und Reihen

Eine *arithmetische Folge* (a_n) ist durch $a_{n+1} = a_n + d$ bis auf das erste Glied vollständig definiert. Diese rekursive Vorschrift kann durch die explizite Definition $a_n = a_1 + (n-1)d$ ersetzt werden. Es gilt

$$a_n = a_m + (n-m)d \qquad\qquad d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

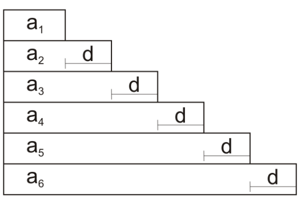
für alle $m \neq n$. Kennt man somit zwei verschiedene Glieder einer arithmetischen Folge, so kennt man die ganze Folge. (Beispiel: Die Folge $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 5$ ist beispielsweise durch die Glieder $a_3 = 13$ und $a_7 = 33$ sowie die Eigenschaft, eine arithmetische Folge zu sein, vollständig bestimmt.)

Die zu einer arithmetischen Folge (a_n) gehörige arithmetische Reihe (s_n) ist gemäss (1) definiert als Folge der Teilsummen durch $s_1 = a_1$ und $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$. Die explizite Definition für (s_n) ist durch

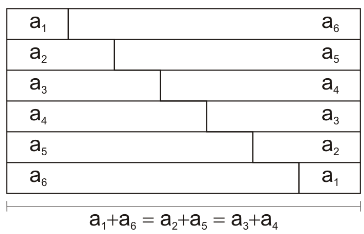
$$s_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$$

gegeben, wie man aus einer Anektote ableiten kann. Der Mathematiker Gauss soll als Schüler die Aufgabe bekommen haben, die Zahlen von eins bis hundert zusammenzuzählen. Er stellte fest, dass die erste und die letzte Zahl, die zweite und die zweitletzte Zahl und so weiter zusammen immer 101 ergibt.

Man kann dasselbe Prinzip an Brettern zeigen. Gegeben seien n Bretter, von denen das erste die Länge a_1, das zweite die Länge $a_2 = a_1 + d$, das dritte die Länge $a_3 = a_2 + d$ und so weiter hat. Gesucht ist die Gesamtlänge dieser Bretter. Die beiden unten stehenden Abbildungen zeigen als Beispiel sechs Bretter.



Die linke Abbildung zeigt eine Anordnung der Bretter. Verdoppelt man die Bretter und setzt sie mit dieser Anordnung wie in der rechten Abbildung zusammen, so ist die doppelte Gesamtlänge der Bretter offensichtlich $6 \cdot (a_1 + a_6)$.



Ausser für den trivialen Fall $d = 0$ sind arithmetische Folgen immer entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend und haben entsprechend immer nur entweder eine untere oder eine obere Schranke. Für arithmetische Folgen mit $d \neq 0$ und für arithmetische Reihen basierend auf der arithmetischen Folge mit $d \neq 0$ und $a_1 \neq 0$ existiert somit kein Grenzwert. Bei arithmetischen Folgen sind also nur die endlichen Teilsummen von Interesse.

3.3 Geometrische Folgen und Reihen

Eine *geometrische Folge* (a_n) ist durch $a_{n+1} = a_n \cdot q$ bis auf das erste Glied vollständig definiert. Diese rekursive Vorschrift kann durch die explizite Definition $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ersetzt werden. Es gilt

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m} \qquad\qquad q = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$$

für alle $m \neq n$. Kennt man somit zwei verschiedene Glieder einer geometrischen Folge, so kennt man die ganze Folge. (Beispiel: Die Folge $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n \cdot 5$ ist beispielsweise durch die Glieder $a_3 = 75$ und $a_7 = 46875$ sowie die Eigenschaft, eine geometrische Folge zu sein, vollständig bestimmt.)

Die zu einer geometrischen Folge (a_n) gehörige geometrische Reihe (s_n) ist gemäss (1) definiert als Folge der Teilsummen durch $s_1 = a_1$ und $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$. Die explizite Definition für (s_n) ist durch

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

gegeben, wie man sieht, wenn man $a_1 + a_1 \cdot q + ... + a_1 \cdot q^{n-1} = s_n$ mit $1-q$ multipliziert. (Wenn man von $s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{n-1}$ den Term $s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + ... + a_1 \cdot q^n$ wegzählt, so heben sich alle Summanden bis auf a_1 und $a_1 \cdot q^n$ gegenseitig auf.)

Für $a_1 > 0$ und $q > 1$ sind geometrische Folgen und Reihen streng monoton wachsend und somit nach oben unbeschränkt. Für $|q| < 1$ hingegen sind beide beschränkt, und es konvergieren sowohl die geometrische Folge wie auch die geometrische Reihe. Der Grenzwert nach (2) für die geometrische Folge ist 0, und derjenige für die geometrische Reihe (also die unendliche Summe über alle Glieder der zu Grunde liegenden Folge) ist

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-q} \tag{3}$$

falls $|q| < 1$.

Um die Formel (3) zu beweisen, wendet man einen ähnlichen Trick an wie den, den man benutzt, wenn man einen periodischen Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch umwandeln will:

Soll der Dezimalbruch $1.7\overline{34} = 1.7343434...$ in einen gewöhnlichen Bruch umgewandelt werden, so multipliziert man diese Zahl mit 100, um sämtliche Ziffern eine ganze Periode nach links zu verschieben, und subtrahiert die Zahl davon. Es bleibt 99 mal diese Zahl übrig, und vom Dezimalbruch mit ursprünglich unendlich vielen Ziffern nach dem Komma bleiben nur noch endlich viele Ziffern $\neq 0$:

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 173.43434343434343434343434343434... \\ -x & = & -1.73434343434343434343434343434... \\ \hline 99x & = & 171.70000000000000000000000000... \end{array}$$

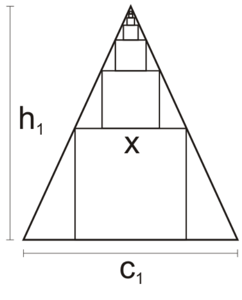
Weil $99x = 171.7$ ist, muss $x = \frac{171.7}{99} = \frac{1717}{990}$ sein, womit man einen gewöhnlichen Bruch für den ursprünglichen Dezimalbruch gefunden hat. (Im Allgemeinen kann man den so gefundenen Bruch noch kürzen.)

Auf ähnliche Weise kann man die unendlich vielen Summanden von

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{i-1} = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + ...$$

bis auf einen loswerden, indem man $s \cdot q$ von s subtrahiert, denn es gilt $s - q \cdot s = a_1 + a_1 \cdot q + ... - (a_1 \cdot q + ...) = a_1 + (a_1 \cdot q + ...) - (a_1 \cdot q + ...) = a_1$, woraus $s(1-q) = a_1$ und die Formel (3) folgt.

Beispiel:
In der nebenstehenden Abbildung ist in einem gleichschenkligen Dreieck ein Quadrat eingeschrieben. Im verbleibenden Dreieck über dem Quadrat wird in gleicher Weise wieder ein Quadrat eingeschrieben und so weiter bis ins Unendliche.

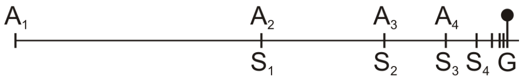


Sei x die Seitenlänge des grössten Quadrates, und seien c_1 und h_1 die Grundseite und die Höhe des grössten Dreiecks, so gilt wegen den Strahlensätzen für das Verhältnis $c_1 : x = h_1 : (h_1 - x)$. Weiter ist $c_2 = x$ die Grundseite des zweitgrössten Dreiecks und $h_2 = h_1 - x$ dessen Höhe.

Daraus folgt $x = c_2 = \frac{c_1 \cdot h_1}{c_1 + h_1}$. Die Folge der Quadratseiten, also die Folge (c_n) ab Index $n = 2$, bildet wegen $c_n : c_{n+1} = c_{n+1} : c_{n+2}$ eine geometrische Folge, und der Grenzwert der zugehörigen geometrischen Reihe ist h_1.

3.4 Achilles und die Schildkröte

Nach dem berühmten Paradoxon von Zenon von Elea kann der schnelle Läufer Achilles die langsame Schildkröte in einem Wettrennen nie einholen, wenn diese einen Vorsprung hat. Die Begründung ist, dass dann, wenn Achilles dort ist, wo die Schildkröte gestartet ist, die Schildkröte ja bereits weitergekommen ist und somit wie in der folgenden Abbildung gezeigt wieder einen Vorsprung hat:



Achilles startet bei A_1 und die Schildkröte bei S_1. Wenn Achilles bei $A_2 = S_1$ ist, ist die Schildkröte bei S_2. So geht das bis in alle Ewigkeit.

Trotzdem holt Achilles die Schildkröte in Wirklichkeit natürlich ein und kommt lange vor ihr ins Ziel. Der Widerspruch löst sich auf, wenn man die Situation mit geometrischen Reihen modelliert.

Sei d_n die Distanz zwischen den Punkten A_n und A_{n+1}, und sei t_n die Zeit, die Achilles für die Strecke d_n und damit die Schildkröte für die Strecke d_{n+1} braucht. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass Achilles zehnmal so schnell vorwärts kommt wie die Schildkröte, und dass somit $d_{n+1} = \frac{1}{10} \cdot d_n$ gilt. Das ist eine geometrische Folge mit $q = \frac{1}{10}$, und die zugehörige Reihe konvergiert gemäss (3) gegen $\frac{10}{9} \cdot d_1$. Dieser Punkt entspricht in der obigen Abbildung dem Punkt G. Die Schildkröte startet bei A_2 und legt die Strecken d_n mit $n \geq 2$ zurück. Zusammen mit dem Vorsprung d_1 gibt das also dieselbe totale Strecke.

Um zu sehen, was beim Punkt G passiert, sehen wir uns die Folge der Zeiten t_n an. Weil sich Achilles und die Schildkröte mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, Achilles aber zehnmal so schnell ist wie die Schildkröte, gilt auch für diese Folge $t_{n+1} = \frac{1}{10} \cdot t_n$, und die entsprechende Reihe konvergiert analog gegen $t = \frac{10}{9} \cdot t_1$. Der Zeitpunkt t entspricht also dem Moment, an dem Achilles und die Schildkröte beim Punkt G angekommen sind, und an dem Achilles die Schildkröte überholt.

3.5 Vollständige Induktion

Die Glieder von Folgen müssen nicht notwendigerweise Zahlen sein, sondern können beispielsweise auch Wahrheitswerte sein. Sei B_n eine Aussage über die Zahl n, so ist die Folge B_1, B_2 und so weiter eine Folge von Wahrheitswerten. Die Aussage B_n hat den Wahrheitswert "wahr", wenn sie wahr ist, und den Wahrheitswert "falsch", wenn sie nicht wahr ist. Darauf basiert die *vollständige Induktion.* Kann man zeigen, dass B_1 wahr ist, und dass, falls B_n wahr ist, auch B_{n+1} wahr ist, so muss B_n für alle natürlichen Zahlen n wahr sein, weil man von 1 mit der Nachfolgerfunktion $n \mapsto n + 1$ jede Zahl in $\mathbb{N}$ erreichen kann.

Beispiel:
Vollständige Induktion eignet sich für viele Beweise im Zusammenhang mit natürlichen Zahlen. Weil sie sich bei Folgen und Reihen speziell anbietet, soll im Folgenden an einem Beispiel gezeigt werden, wie man beweist, dass eine rekursive und eine explizite Vorschrift dieselbe Folge definieren:

Behauptung: Die durch $a_1 = 6$ und $a_n = a_{n-1} + 3n - 1$ rekursiv definierte Folge fällt mit der explizit durch $b_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 4$ definierten Folge zusammen. Es gilt also $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

1. *Induktionsverankerung:* Im ersten Schritt zeigt man $a_1 = b_1$, was leicht zu beweisen ist, indem man den Wert $n = 1$ in die Definition von b_n einsetzt und $b_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 4 = 6 = a_1$ bekommt.
2. *Induktionsschritt:* Im zweiten Schritt nimmt man als *Induktionsvoraussetzung* für den Wert n an, dass $a_n = b_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 4$ gilt, und zeigt, dass dann auch $a_{n+1} = b_{n+1}$ gelten muss. Vorher soll aber die rekursive Definition erst etwas umgeformt werden, um mit $a_{n+1} = a_n + 3(n+1) - 1$ den Rekursionsschritt von n auf $n + 1$ und nicht wie vorher von $n - 1$ auf n zu machen.
   Man berechnet einerseits mit der Induktionsvoraussetzung $a_n = b_n$ das $(n+1)$-te rekursiv definierte Glied $a_{n+1} = a_n + 3(n+1) - 1 = b_n + 3(n+1) - 1 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 4 + 3(n+1) - 1 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 6$ und andererseits das $(n+1)$-te explizit definierte Glied $b_{n+1} = \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) + 4 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 6$ und sieht, dass somit auch $a_{n+1} = b_{n+1}$ gilt, was den Beweis abschliesst.