Folgen und Reihen

Eine **Folge** ist eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, wobei man aber üblicherweise a_n statt f(n) schreibt. Für die ganze Folge schreibt man (a_n), und für das einzelne **Glied** schreibt man a_n. Für a_n ist a_{n-1} der **Vorgänger** und a_{n+1} der **Nachfolger**. Die Grösse $_n$ heisst **Index**.

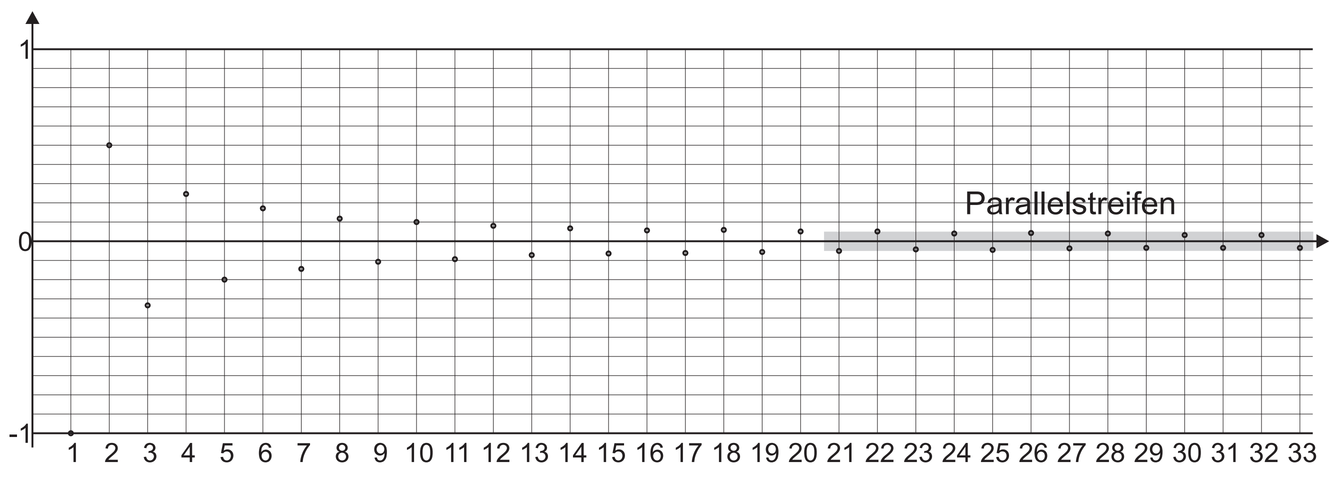
Es gibt zwei Arten von Vorschriften, um eine unendliche Folge zu definieren:

1. **Explizite Definition:** Man gibt an, wie man das n-te Glied a_n direkt aus Konstanten und Funktionen von n berechnen kann.
   Beispiel: $a_n = 3n^2 + 2n - 7$
2. **Rekursive Definition:** Man gibt das erste Glied (oder die ersten Glieder) der Folge an zusammen mit einer Vorschrift, wie man aus dem Vorgänger (oder den Vorgängern) das nächste Glied berechnet.
   Beispiel: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ (Fibonacci-Zahlen)

Monotonie:
Eine Folge (a_n) ist
- **streng monoton wachsend**, wenn für alle n $a_{n+1} > a_n$ gilt,
- **monoton wachsend**, wenn für alle n $a_{n+1} \geq a_n$ gilt,
- **streng monoton fallend**, wenn für alle n $a_{n+1} < a_n$ gilt,
- **monoton fallend**, wenn für alle n $a_{n+1} \leq a_n$ gilt.

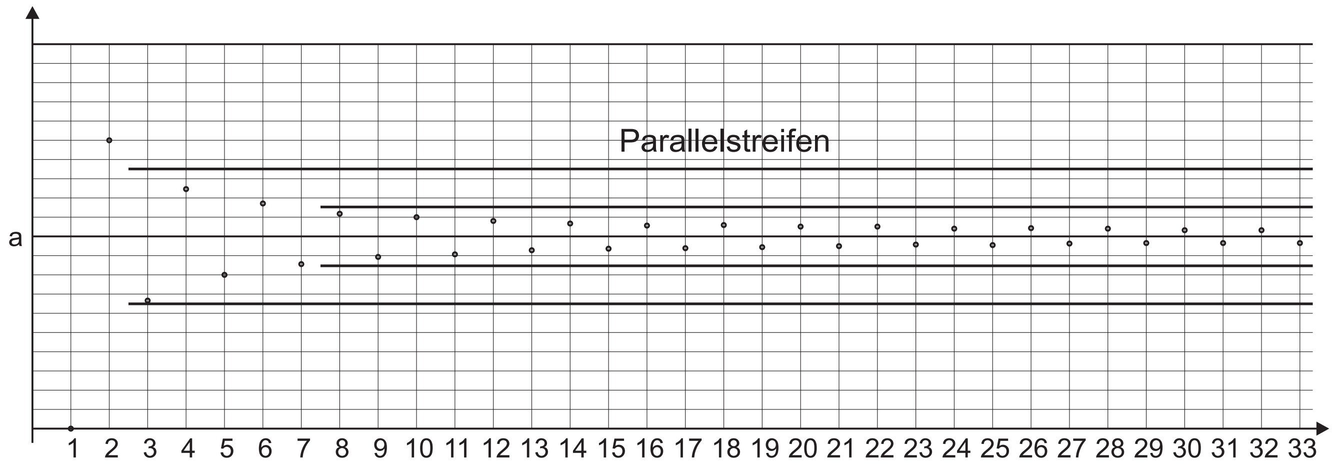
Schranken:
Die Zahl S_o heisst **obere Schranke** der Folge (a_n), wenn für alle n $S_o \geq a_n$ gilt.
Die Zahl S_u heisst **untere Schranke** der Folge (a_n), wenn für alle n $S_u \leq a_n$ gilt.
Hat eine Folge (a_n) eine obere Schranke, ist sie **nach oben beschränkt**, und hat sie eine untere Schranke, ist sie **nach unten beschränkt**. Ist eine Folge (a_n) nach oben und nach unten beschränkt, so heisst sie **beschränkt**.

Graph einer Folge: $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}$



Bei diesem Beispiel liegen sämtliche Glieder a_n der Folge im **Parallelstreifen** zwischen -0.5 und $+0.5$, sobald $n > 20$ ist.

Grenzwert



Gibt es für eine Folge (a_n) zu jedem noch so dünnen Parallelstreifen um a einen Index, sodass alle Glieder der Folge mit grösserem Index in diesem Parallelstreifen liegen, so nennt man den Wert a den **Grenzwert** der Folge. Man schreibt dafür: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Hat eine Folge einen Grenzwert a, so **konvergiert** sie gegen a und heisst **konvergent**. Hat sie keinen Grenzwert, so **divergiert** sie und heisst **divergent**.

Beispiele:
Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ hat den Grenzwert 0. Im Parallelstreifen zwischen den Zahlen -0.00001 und $+0.00001$ liegen alle Folgenglieder mit Index grösser als 100'000. Im schmaleren Parallelstreifen zwischen den Zahlen -0.000001 und $+0.000001$ liegen alle Folgenglieder mit Index grösser als 1'000'000. So lässt sich für einen Parallelstreifen um 0 immer ein Index finden, und sei er noch so schmal, sodass alle Glieder mit einem grösseren Index in diesem Parallelstreifen liegen.
Die Folge $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen e (Euler'sche Zahl).
Die Folge $b_1 = 2$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{2}{b_n}\right)$ konvergiert gegen $\sqrt{2}$ (Heron-Verfahren).

Satz:
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Satz:
Konvergiert die Folge (a_n) gegen a und die Folge (b_n) gegen b, und ist c eine reelle Zahl, dann konvergiert die Folge $(a_n + b_n)$ gegen $a + b$, die Folge $(a_n + c)$ gegen $a + c$ und die Folge $(c \cdot a_n)$ gegen $c \cdot a$.

Beispiel:
In den obigen Beispielen konvergiert (a_n) gegen 0, (e_n) gegen e und (b_n) gegen $\sqrt{2}$. Somit konvergiert die Folge $(a_n + b_n)$ gegen $\sqrt{2}$ und die Folge $(3 \cdot a_n + 7 \cdot b_n + 5 \cdot e_n)$ gegen $7\sqrt{2} + 5e$.

Zu jeder Folge (a_n) gibt es eine Folge (s_n), die durch

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

definiert ist. Sie heisst **Reihe**, und ihr n-tes Glied heisst n-te **Teilsumme** der Folge (a_n).

Beispiel:
Für die Folge mit $a_n = n$ gilt für die Reihe $s_1 = 1$, $s_2 = 1+2 = 3$, $s_3 = 1+2+3 = 6$ und so weiter.