Faktorisierung bei Brüchen und Bruchtermen

Rainer Hauser

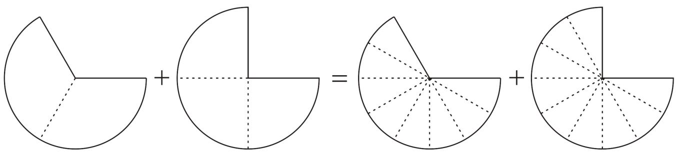
Mai 2016

1 Einleitung

1.1 Rationale Zahlen

Teilt man einen Gegenstand in eine Anzahl gleich grosse Stücke, so bekommt man gebrochene Zahlen, die man auch rationale Zahlen nennt, und die man als Brüche schreiben kann. Teilt man beispielsweise einen Kuchen in zwölf gleich grosse Stücke, so ist jedes Stück ein Zwölftel des ganzen Kuchens. Dafür schreibt man den Bruch $\frac{1}{12}$.

Weil Addition nicht nur bei natürlichen, sondern auch bei rationalen Zahlen ein abgekürztes Verfahren für das Zählen ist, muss man erst gleich grosse Stücke schaffen, bevor man Brüche addieren kann. Will man beispielsweise $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ zusammenzählen, so geht das nicht direkt, weil Drittel und Viertel verschiedene Grösse haben. Teilt man jedoch jeden Drittel in vier gleiche Stücke und jeden Viertel in drei gleiche Stücke, so gibt das in beiden Fällen Zwölftel. Die Stücke sind jetzt gleich gross



und man kann sie zählen. Zwei Drittel sind acht Zwölftel und drei Viertel sind neun Zwölften, was zusammen siebzehn Zwölftel gibt. Etwas abstrakter heisst da, um $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ zu berechnen, macht man die beiden Brüche durch Erweitern erst gleichnamig und addiert die Zähler, was $\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$ ergibt. Man hätte auch Vierundzwanzigstel machen können, und hätte dann vierunddreissig Vierundzwanzigstel bekommen, was man jedoch bekanntlich zu siebzehn Zwölftel kürzen kann, weil 34 und 24 durch zwei teilbar sind.

Brüche kann man auch multiplizieren. Will man beispielsweise die siebzehn Zwölftel im obigen Beispiel auf zwei Personen gerecht verteilen, so bekommt jeder die Hälfte von siebzehn Zwölftel, was als Rechnung $\frac{1}{2} \cdot \frac{17}{12} = \frac{17}{24}$ ergibt, weil man jedes der siebzehn Zwölftel in zwei Vierundzwanzigstel teilen kann, sodass beide Personen je siebzehn Vierundzwanzigstel bekommen.

1.2 Brüche mit Variablen

Sobald man eine Grösse nicht kennt, führt man Variablen ein. Weiss man beispielsweise, dass drei Kuchen auf eine unbekannte Anzahl Leute so aufgeteilt werden sollen, dass jede Person genau einen Viertel eines Kuchens bekommt, so kann man für die unbekannte Anzahl Leute x schreiben, und die Gleichung $\frac{3}{x} = \frac{1}{4}$ aufstellen. Diese Gleichung kann man lösen und bekommt $x = 12$.

Eine Grösse mit Variablen, die so aufgebaut ist, dass man sie berechnen kann, wenn man für die Variablen Zahlen einsetzt, nennt man einen Term. Die Grösse $a+2\cdot(b+5)$ ist ein Term, während $+a(b$ nicht sinnvoll und damit kein Term ist. Kommen in Brüchen Variablen vor, so spricht man von Bruchtermen. Die linke Seite $\frac{3}{x}$ in der obigen Gleichung ist ein Bruchterm. (Eigentlich braucht es keine Variablen in Termen und Bruchtermen, denn die Grössen $5 + 7$ oder 91 sind auch Terme und $\frac{3}{4}$ ist auch ein Bruchterm.)

Bruchterme kommen in der Physik sehr häufig vor. Aber auch eine einfache Aufgabe wie die Berechnung des Durchschnitts – also Mittelwerts – zweier Zahlen, lässt sich als Bruchterm schreiben. Sind x und y zwei Zahlen, so ist

$$\frac{x+y}{2}$$

deren Durchschnitt.

1.3 Das Problem mit dem Ausmultiplizieren

In der Primarschule lernt man für 6×7 die Zahl 42 zu schreiben. So lernt man auch, dass ein nicht ausmultipliziertes Produkt nicht fertig gerechnet ist. Das ist auf dieser Schulstufe auch richtig so, denn die Schülerinnen und Schüler müssen mit der Operation Multiplikation vertraut werden und das Einmaleins lernen. So lässt man 6×7 nicht einfach stehen, sondern schreibt dafür die Zahl 42.

Auf Stufe Gymnasium ändert sich das aber, denn man lässt Produkte in Zwischenresultaten lieber als Faktoren stehen, weil man ja vielleicht später kürzen muss, und da ist es einfacher, wenn man die Faktoren schon hat. Wenn man die beiden Brüche

$$\frac{723629}{473323} = \qquad\qquad \frac{769 \cdot 941}{503 \cdot 941} =$$

anschaut, die man so weit wie möglich kürzen soll, so ist sicher die zweite Version einfacher, zumal 503, 769 und 941 Primzahlen sind, was die Primfaktorzerlegung von Zähler und Nenner auf der linken Seite nicht einfach macht. Desgleichen ist das Analysieren der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{30x^3 - 203x^2 + 299x + 154}{60x^3 - 91x^2 - 21x + 10} \qquad\qquad f(x) = \frac{(2x-7)(3x-11)(5x+2)}{(3x-5)(4x-1)(5x+2)}$$

auf der rechten Seite sicher einfacher als in der linken ausmultiplizierten Form. (Man beachte, dass Gymnasiastinnen und Gymnasiasten zwar lernen, wie man quadratische Polynome faktorisiert, nicht aber, wie man dies bei kubischen Polynomen tut.)

2 Faktorisieren

2.1 Faktorisieren von Brüchen

Um Brüche vollständig zu kürzen, muss man alle gemeinsamen Faktoren von Zähler und Nenner finden. Am systematischsten geschieht das, wenn man sowohl Zähler wie Nenner in Primfaktoren zerlegt. Das folgende Beispiel

$$\frac{98\,687\,043}{44\,528\,253} = \frac{3^2 \cdot 7 \cdot 13^3 \cdot 23 \cdot 31}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17^2 \cdot 23 \cdot 29} = \frac{3 \cdot 13^3 \cdot 31}{11 \cdot 17^2 \cdot 29} = \frac{204\,321}{92\,191}$$

zeigt den ursprünglichen Bruch, die Primfaktorzerlegung von Zähler und Nenner sowie den vollständig gekürzten Bruch in faktorisierter Form sowie ausmultipliziert.

Brüche kann man auch schrittweise kürzen, wie das folgenden Beispiel

$$\frac{808\,500}{163\,800} = \frac{8085}{1638} = \frac{2695}{546} = \frac{385}{78} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 13}$$

zeigt. Im ersten Schritt kürzt man mit 100, im zweiten mit 3 und im dritten mit 7. Jetzt ist die Primfaktorzerlegung von Zähler und Nenner nicht mehr schwierig.

2.2 Faktorisieren von Bruchtermen

Für allgemeine Bruchterme gibt es kein Rezept, wie man sie faktorisiert. Im gymnasialen Mathematikunterricht kommen aber häufig Polynomfunktionen vor. Weil ein Polynom n-ten Grades bis zu n reellen Nullstellen hat, kann man unter Umständen einzelne Nullstellen bestimmen. Ist $f(x)$ ein quadratisches

Polynom – also eine quadratische Funktion – in der Form $ax^2 + bx + c$, so kann man die Nullstellen x_1 und x_2 – sofern vorhanden – mit der Formel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

bestimmen. Gibt es nur eine Nullstelle x_1, so gilt $f(x) = a(x - x_1)^2$, und gibt es zwei Nullstellen x_1 und x_2, so gilt $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Somit kann man ein Polynom zweiten Grades in ein Produkt umwandeln. Das folgende Beispiel

$$\frac{10x^2 + 7x - 6}{5x^2 - 9x - 18} = \frac{10(x - 0.5)(x + 1.2)}{5(x + 1.2)(x - 3)} = \frac{2(x - 0.5)}{x - 3} = \frac{2x - 1}{x - 3}$$

zeigt, wie Zähler und Nenner erst auf diese Weise faktorisiert und der Bruch anschliessend gekürzt wird. (Es ist zu beachten, dass der Bruchterm ganz links und der Bruchterm ganz rechts in diesem Beispiel nicht identisch sind, denn der Bruchterm links ist eigentlich für $x + 1.2 = 0$ oder $x = -1.2$ nicht definiert, weil sonst sein Nenner 0 wird, während der Bruchterm rechts an dieser Stelle kein Problem hat.)

In gewissen Fällen kann man auch Bruchterme, deren Zähler und Nenner Polynome höheren Grades sind, faktorisieren. Das folgende Beispiel

$$10x^3 + 7x^2 - 6x = x(10x^2 + 7x - 6) = 10x(x - 0.5)(x + 1.2)$$

mag an dieser Stelle genügen. Das Polynom dritten Grades konnte durch Ausklammern von x in ein Produkt von x mit einem Polynom zweiten Grades und somit weiter in ein Produkt der vier Faktoren 10, x, $x - 0.5$ und $x + 1.2$ verwandelt werden.

3 Strategien beim Faktorisieren

3.1 Fragestellung beim Faktorisieren

Manchmal muss man ein Produkt ausmultiplizieren und manchmal ist es einfacher, wenn man ein Produkt als Produkt stehen lässt. Somit ist es nützlich, wenn man Kriterien hat, die einem beim Entscheid helfen, was einem in einer bestimmten Situation näher zur Lösung bringt. Das folgende Beispiel

$$\frac{17}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2^3}{3^2 \cdot 5} - \frac{11}{2^2 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 17 + 2^2 \cdot 2^3 - 3^2 \cdot 11}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{35}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 7}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{7}{36}$$

zeigt eine Situation, in der man die drei Zähler ausmultiplizieren muss, nachdem man die Brüche gleichnamig gemacht hat, die Nenner aber in faktorisierter Form lassen kann. Die allgemeinen Kriterien sind sehr einfach, denn es gibt nur zwei simple Regeln.

3.2 Addition und Subtraktion von Brüchen und Bruchtermen

Weil jede Subtraktion auch als Addition mit anderem Vorzeichen betrachtet werden kann, sei hier nur die Addition besprochen. Addiert man Brüche oder Bruchterme, muss man die Summanden erst gleichnamig machen. Das heisst, die Summanden werden so erweitert, dass alle Nenner gleich sind. Das Resultat ist eine Summe von Produkten im Zähler und ein Produkt im Nenner. Weil man in Summen nicht kürzen kann, muss der Zähler erst wieder in ein Produkt umgewandelt werden. Die Strategie ist also die, dass man den Nenner als Produkt in faktorisierter Form stehen lässt, den Zähler aber durch Ausmultiplizieren und anschliessendem Faktorisieren wieder in ein Produkt umformt.

Die strategischen Überlegungen seien an einem Beispiel gezeigt. Ist die Aufgabe, den Bruchterm

$$\frac{3x - 8}{x^2 - 8x + 16} + \frac{2x + 12}{16 - x^2} - \frac{1}{2x + 8}$$

zu vereinfachen, so faktorisiert man in einem ersten Schritt die drei vorkommenden Nenner. Dabei gilt $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$, $16 - x^2 = -(x - 4)(x + 4)$ und $2x + 8 = 2(x + 4)$. Es kommen also im Wesentlichen die beiden Terme $x+4$ und $x-4$ vor. Damit lässt sich der gegebene Bruchterm gleichnamig machen, was

$$\frac{3x-8}{(x-4)^2} - \frac{2x+12}{(x-4)(x+4)} - \frac{1}{2(x+4)} = \frac{2(x+4)(3x-8) - 2(x-4)(2x+12) - (x-4)^2}{2(x-4)^2(x+4)}$$

ergibt. Den Nenner kann man so lassen, weil man später vielleicht noch kürzen kann, den Zähler muss man aber erst umformen. Das gibt $6x^2+8x-64-4x^2-8x+96-x^2+8x-16$ durch Ausmultiplizieren und $x^2+8x+16$ durch Vereinfachen, was $(x+4)^2$ entspricht, womit der umgeformte Zähler wieder faktorisiert ist. Damit bekommt man

$$\frac{3x-8}{(x-4)^2} - \frac{2x+12}{(x-4)(x+4)} - \frac{1}{2(x+4)} = \frac{(x+4)^2}{2(x-4)^2(x+4)} = \frac{x+4}{2(x-4)^2}$$

ergibt. Der Nenner ist somit immer in faktorisierter Form gelassen worden, während der Zähler erst durch Ausmultiplizieren, Vereinfachen und Faktorisieren wieder zu einem Produkt gemacht werden konnte, um schliesslich einen Faktor $(x+4)$ zu kürzen.

3.3 Multiplikation und Division von Brüchen und Bruchtermen

Bei Multiplikation und Division von Brüchen und Bruchtermen kann man sowohl die Zähler als auch die Nenner immer in faktorisierter Form lassen. Hier muss man beim Setzen von Klammern aufpassen, denn Bruchstriche wirken wie Klammern, die man wie in

$$\frac{a+b}{c+d} = (a+b) \div (c+d)$$

beim Umformen richtig setzen muss.

Auch hier sollen die strategischen Überlegungen beim Umformen und Vereinfachen an einem Beispiel gezeigt werden. Gilt es den Bruchterm

$$\frac{x^2-9}{6x+15} \div \frac{x^2+6x+9}{10x+25}$$

zu vereinfachen, so wird aus der Division der beiden Bruchterme eine Multiplikation mit dem reziproken zweiten Bruchterm. Weiter faktorisiert man sämtliche Terme im Zähler und Nenner, was zu

$$\frac{x^2-9}{6x+15} \cdot \frac{10x+25}{x^2+6x+9} = \frac{(x+3)(x-3)}{3(2x+5)} \cdot \frac{5(2x+5)}{(x+3)^2} = \frac{5(x+3)(x-3)(2x+5)}{3(2x+5)(x+3)^2}$$

führt, nachdem man alle Faktoren in einen Bruchterm zusammengefasst hat. Jetzt ist klar, welche Faktoren man kürzen kann, und man bekommt

$$\frac{5(x-3)}{3(x+3)}$$

als Resultat, das sich nicht mehr weiter kürzen lässt.

4 Zusammenfassung

4.1 Faktorisierte Form als Standard

Bei Brüchen und Bruchtermen ist das Ziel, einen Bruch beziehungsweise Bruchterm zu bekommen, bei dem sowohl der Zähler wie auch der Nenner ein Produkt ist, sodass man gemeinsame Faktoren kürzen kann. Das Ziel ist also nicht Ausmultiplizieren, sondern Faktorisieren. Deshalb sollte $4(x-0.25)(x-3)$ als sinnvollere Darstellung betrachtet werden als das equivalente $4x^2-13x+3$, denn Ausmultiplizieren kann man im Notfall immer noch, während es manchmal schwierig ist, von der ausmultiplizierten Form zur faktorisierten Form zu kommen. Auch bei der Addition und Subtraktion von Brüchen und Bruchtermen bleibt das Ziel, die entstehende Summe beziehungsweise Differenz im Zähler durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen von Termen, die sich direkt addieren oder subtrahieren lassen wie beispielsweise $5x$ und $3x$ oder $4x^2$ und $7x^2$, so zu vereinfachen, dass man anschliessend wieder ein Produkt durch Faktorisieren bekommen kann.

Falls nötig kann man das Schlussresultat noch ausmultiplizieren. Bei Brüchen ist das meistens sinnvoll, denn der Bruch $\frac{3\cdot 8}{5}$ beispielsweise ist sicher weniger lesbar als der Bruch $\frac{24}{5}$. Bei Bruchtermen mit Variablen ist das hingegen nicht mehr so klar. Ob die linke oder rechte Version in der Identität

$$\frac{5(x-3)}{3(x+3)} = \frac{5x-15}{3x+9}$$

leichter verständlich ist, kann nicht so einfach beantwortet werden. Falls aber die Möglichkeit besteht, dass man mit einem Bruchterm weiterarbeiten muss, so ist

$$\frac{(3x-5)(2x+1)(x+4)}{(2x-3)(4x+5)(5x+3)}$$

sicher nützlicher als

$$\frac{6x^3+17x^2-33x-20}{40x^3+14x^2-81x-45}$$

in ausmultiplizierter Form. Deshalb sollte man sich angewöhnen, die faktorisierte Form von Termen als Standard zu betrachten und nicht die ausmultiplizierte Form.

Faktorisieren kann man einerseits durch Ausklammern von gemeinsamen Faktoren. So wird aus x^2-3x durch Ausklammern $x(x-3)$. Faktorisieren kann man aber auch durch das Bestimmen von Nullstellen, was vor allem bei quadratischen Funktionen – also bei Polynomen zweiten Grades – sehr nützlich ist, weil man die Nullstellen einfach finden kann. Die Überlegungen hier sind aber nicht nur bei Bruchtermen nützlich, bei denen Zähler und Nenner Polynome sind, sondern gelten generell. Dazu mag das Beispiel

$$\tan(x)\cdot\cos(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\cos(x) = \sin(x)$$

aus der Trigonometrie als Illustration dienen. Hier vereinfacht man die Tangensfunktion in einen Bruch mit Sinus im Zähler und Cosinus im Nenner.

4.2 Aufgaben

Aufgabe 1

$$\frac{9}{20}+\frac{3}{10}+\frac{1}{4} = \qquad\qquad \frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{8}{15} =$$

Aufgabe 2

$$\frac{x^2-xy}{2x+1}\cdot\frac{4+8x}{x-y} = \qquad\qquad \frac{2x+3}{x-4} \div \frac{10x+15}{8-2x} =$$

Aufgabe 3

$$\frac{a}{(a+b)b}+\frac{1}{a}-\frac{b}{a(a+b)} = \qquad\qquad \frac{2a(4xy+z)}{(8xy+2z)(a^2-3ab)} =$$

Aufgabe 4

$$\frac{20b}{a+b}\cdot\frac{4a}{15a^2-25ab}-\frac{12b}{6ab-10b^2} =$$

Aufgabe 5

$$\frac{3x}{x-y}\cdot\frac{4y}{3x+9y}+\frac{2x^3}{2x^3+6x^2y} =$$

4.3 Lösungen

Lösung der Aufgabe 1

$$\frac{9}{20}+\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=1 \qquad \frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{8}{15}=\frac{2}{3}$$

Lösung der Aufgabe 2

$$\frac{x^2-xy}{2x+1}\cdot\frac{4+8x}{x-y}=4x \qquad \frac{2x+3}{x-4}\div\frac{10x+15}{8-2x}=-\frac{2}{5}$$

Lösung der Aufgabe 3

$$\frac{a}{(a+b)b}+\frac{1}{a}-\frac{b}{a(a+b)}=\frac{1}{b} \qquad \frac{2a(4xy+z)}{(8xy+2z)(a^2-3ab)}=\frac{1}{a-3b}$$

Lösung der Aufgabe 4

$$\begin{aligned}\frac{20b}{a+b}\cdot\frac{4a}{15a^2-25ab}-\frac{12b}{6ab-10b^2}&=\frac{80ab}{5a(a+b)(3a-5b)}-\frac{12b}{2b(3a-5b)}=\frac{16b-6(a+b)}{(a+b)(3a-5b)}\\&=\frac{10b-6a}{(a+b)(3a-5b)}=\frac{(-2)(3a-5b)}{(a+b)(3a-5b)}=-\frac{2}{a+b}\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 5

$$\begin{aligned}\frac{3x}{x-y}\cdot\frac{4y}{3x+9y}+\frac{2x^3}{2x^3+6x^2y}&=\frac{12xy}{3(x-y)(x+3y)}+\frac{2x^3}{2x^2(x+3y)}=\frac{4xy}{(x-y)(x+3y)}+\frac{x}{x+3y}\\&=\frac{4xy}{(x-y)(x+3y)}+\frac{(x-y)x}{(x-y)(x+3y)}=\frac{x(x+3y)}{(x-y)(x+3y)}=\frac{x}{x-y}\end{aligned}$$