Exponential- und Logarithmusfunktionen

Rainer Hauser

September 2014

1 Einleitung

1.1 Addieren, Multiplizieren und Potenzieren

Addieren: Die Beziehung $a + b = c$ führt zu drei Gleichungen, wenn man zwei der Grössen als bekannt und die dritte als unbekannt betrachtet. Die Gleichung $a + b = x$ kann durch die Addition, die beiden Gleichungen $x + b = c$ und $a + x = c$ durch die Subtraktion gelöst werden. Weil die Addition das Kommutativgesetz erfüllt, genügt die Subtraktion zum Lösen beider Gleichungen.

Multiplizieren: Die Beziehung $a \cdot b = c$ führt zu drei Gleichungen, wenn man zwei der Grössen als bekannt und die dritte als unbekannt betrachtet. Die Gleichung $a \cdot b = x$ kann durch die Multiplikation, die beiden Gleichungen $x \cdot b = c$ und $a \cdot x = c$ durch die Division gelöst werden. Weil die Multiplikation das Kommutativgesetz erfüllt, genügt die Division zum Lösen beider Gleichungen.

Potenzieren: Die Beziehung $a^b = c$ führt zu drei Gleichungen, wenn man zwei der Grössen als bekannt und die dritte als unbekannt betrachtet. Diese Gleichungen sind $a^b = x$ sowie $x^b = c$ und $a^x = c$. Auch für sie möchte man einfache Lösungen. Weil aber mit Ausnahmen (beispielsweise $2^4 = 4^2$) $a^b \neq b^a$ gilt und somit kein Kommutativgesetz wie Addition und Multiplikation erfüllt ist, braucht das Potenzieren zwei Umkehroperationen.

1.2 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Die erste Gleichung $a^b = x$ für beliebige reelle Zahlen a und b kann durch die Erweiterung der Exponenten auf reelle Zahlen gelöst werden. Damit ist der Ausdruck a^b für alle $a \in \mathbb{R}_+$ und $b \in \mathbb{R}$ definiert.

Die zweite Gleichung $x^b = c$ führt zu $x = \sqrt[b]{c}$ als Lösung. Weil sich die verallgemeinerte Wurzel aber durch $\sqrt[b]{c} = c^{\frac{1}{b}}$ als Potenz schreiben lässt, ist auch diese Gleichung mit allgemeinen Potenzen lösbar.

Die dritte Gleichung $a^x = c$ lässt sich jedoch nicht mehr mit der Einführung allgemeiner reeller Exponenten lösen. Dafür muss eine neue Familie von Funktionen eingeführt werden. Das sind die Logarithmusfunktionen.

2 Exponentialfunktionen

2.1 Definition der Exponentialfunktionen

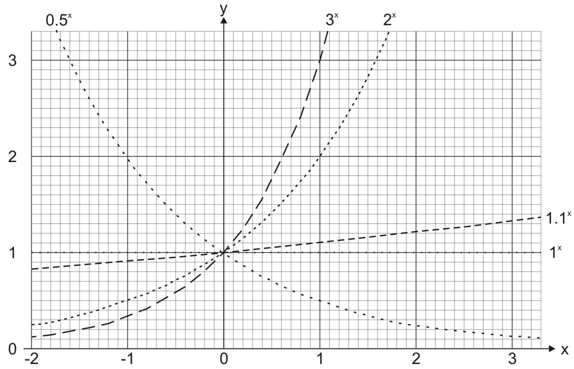
Definition:
Die Funktion $x \mapsto a^x$ für $a > 0$ heisst *Exponentialfunktion* zur Basis a.

Beispiel:
Wenn man einen Franken mit 10% Zinsen anlegt, hat man nach einem Jahr $1 + \frac{10}{100} = 1.1$ und nach zwei Jahren $1.1 \cdot 1.1 = 1.21$ Franken. Nach n Jahren ist also das Kapital von einem Franken auf 1.1^n Franken angestiegen. Bei einem Zinssatz von k% ist der Franken nach einem Jahr auf $1 + \frac{k}{100}$ und nach n Jahren auf $(1 + \frac{k}{100})^n$ angewachsen.

Die Graphen aller Exponentialfunktionen liegen vollständig im Bereich $y > 0$, denn mit $a > 0$ ist auch $a^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die nebenstehende Abbildung zeigt folgende Graphen:

1. Basis 2: $x \mapsto 2^x$
2. Basis 3: $x \mapsto 3^x$
3. Basis 1.1: $x \mapsto 1.1^x$
4. Basis 0.5: $x \mapsto 0.5^x$
5. Basis 1: $x \mapsto 1^x$

Die Graphen von $x \mapsto a^x$ und $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ gehen durch Spiegelung an der y-Achse ineinander über.



Definition:
Die Funktion $x \mapsto f(x)$ ist *monoton steigend (wachsend)* beziehungsweise *monoton fallend*, wenn für alle $x_2 > x_1$ auch $f(x_2) \geq f(x_1)$ beziehungsweise $f(x_2) \leq f(x_1)$ gilt. Sie ist *streng monoton steigend* beziehungsweise *streng monoton fallend*, wenn sogar $f(x_2) > f(x_1)$ beziehungsweise $f(x_2) < f(x_1)$ gilt. (Erfüllt sie die Bedingung für eine der strengen Monotonien, so nennt man sie streng monoton, und erfüllt sie irgendeine dieser Monotoniebedingungen, so heisst sie monoton.)

Die Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ für $a > 0$ nimmt nur positive Werte an und schneidet die y-Achse beim Wert 1. Gilt weiter $0 < a < 1$ beziehungsweise $1 < a$, so hat sie folgende Eigenschaften:

1. Sie ist streng monoton fallend beziehungsweise wachsend.
2. Sie schmiegt sich rechts beziehungsweise links der x-Achse an.
3. Sie wächst nach links beziehungsweise rechts ins Unendliche.
4. Ihre Steigung ist negativ beziehungsweise positiv und nimmt mit wachsendem x zu.

2.2 Die natürliche Exponentialfunktion

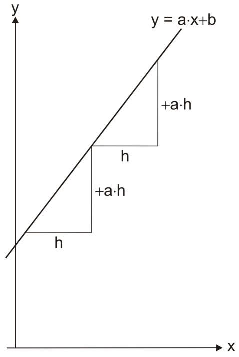
Die *natürliche Exponentialfunktion* $x \mapsto e^x$ hat die Euler'sche Zahl $e = 2.7182818$, eine irrationale Zahl, als Basis. Der Graph der natürlichen Exponentialfunktion hat im Punkt $(0, 1)$ die Steigung 1.

Umrechnung in diese Basis:
Weil sich jede Zahl $a > 0$ für genau ein c als $a = e^c$ darstellen lässt, kann jede Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ durch eine natürliche Exponentialfunktion $x \mapsto a^x = (e^c)^x = e^{c \cdot x}$ ersetzt werden.

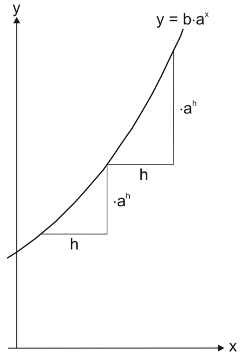
2.3 Allgemeine Exponentialfunktion

Definition:
Die Funktion $x \mapsto b \cdot a^x$ für $a > 0$ heisst *allgemeine Exponentialfunktion* zur Basis a. Man nennt sie meist einfach Exponentialfunktion oder exponentielle Funktion.

Lineare und exponentielle Funktionen haben eine interessante und wichtige Eigenschaft:



Lineare Funktion



Exponentielle Funktion

Lineare Funktion $f(x) = a \cdot x + b$:
$f(x + h) = a \cdot x + a \cdot h = f(x) + a \cdot h$
Bei der linearen Funktion in der nebenstehenden Abbildung links ändert sich der Funktionswert von $f(x)$ zu $f(x + h)$ um den von x unabhängigen additiven Wert $a \cdot h$.

Exponentielle Funktion $f(x) = b \cdot a^x$:
$f(x + h) = b \cdot a^x \cdot a^h = f(x) \cdot a^h$
Bei der exponentiellen Funktion in der nebenstehenden Abbildung rechts ändert sich der Funktionswert von $f(x)$ zu $f(x + h)$ um den von x unabhängigen multiplikativen Wert a^h.

Sucht man bei einer linearen Funktion den Wert in der Mitte zwischen zwei Funktionswerten, so kann man dafür das *arithmetische Mittel*

$$f(x) = \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2}$$

benutzen. Sucht man hingegen bei einer exponentiellen Funktion den Wert in der Mitte zwischen zwei Funktionswerten, so kann man dafür das *geometrische Mittel*

$$f(x) = \sqrt{f(x-h) \cdot f(x+h)}$$

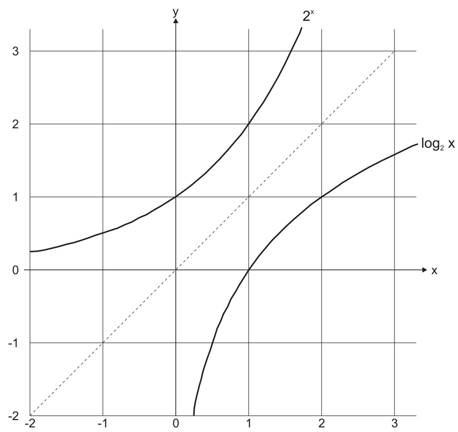
benutzen. Exponentielle Funktionen haben deshalb eine feste *Verdoppelungszeit*, falls $a > 1$ ist, oder eine feste *Halbwertszeit*, falls falls $0 < a < 1$ gilt.

Exponentialfunktionen werden benutzt, um exponentielle Wachstums- oder Abnahmeprozesse zu beschreiben. Bevölkerungswachstum und Kapitalwachstum sind Beispiele, doch auch der radioaktive Zerfall und die Ausscheidung von Stoffen im Körper gehören in diese Kategorie.

Beispiel:
Wird mit dem Kapital von Fr. 1000.- ein Bankkonto eröffnet, das (ohne Spesen) einen Zins von 1.25% erwirtschaftet, so lässt sich die Entwicklung des Kontos durch $N(t) = N_0 \cdot 1.0125^t$ darstellen, wobei N_0 das Anfangskapital Fr. 1000.- und t die Zeit in Jahren ist. Unabhängig vom Anfangskapital verdoppelt sich ein Kapital in einer bestimmten Zeit, die nur vom Zins abhängt.

3 Logarithmusfunktionen

3.1 Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen



Exponential- und Logarithmusfunktionen sind Umkehrfunktionen voneinander. Weil man den Graphen der Umkehrfunktion durch Spiegelung des Graphen der ursprünglichen Funktion an der Winkelhalbierenden der beiden Koordinatenachsen bekommt, ist der Graph der Umkehrfunktion von $x \mapsto 2^x$ aus der nebenstehenden Abbildung ersichtlich.

Die Gleichung $2^x = c$ hat für $c > 0$ genau eine Lösung, die als $\log_2 c$ geschrieben und *Logarithmus* von c zur Basis 2 genannt wird. Die Umkehrfunktion von $x \mapsto 2^x$ ist also die Logarithmusfunktion $x \mapsto \log_2 x$ zur Basis 2.

Der Logarithmus einer Zahl b zu einer Basis a erfüllt also die beiden Beziehungen

$$a^{\log_a b} = b \qquad \log_a a^b = b \tag{1}$$

gemäss Definition.

3.2 Logarithmusgesetze

Rechnen mit Logarithmen passiert auf der Ebene der Exponenten und es gelten die *Logarithmusgesetze*

$$\log_a(1) = 0 \qquad \log_a(a) = 1 \tag{2}$$
$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c) \qquad (b > 0, c > 0) \tag{3}$$
$$\log_a(b \div c) = \log_a(b) - \log_a(c) \qquad (b > 0, c > 0) \tag{4}$$
$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b) \qquad (b > 0) \tag{5}$$

für $0 < a < 1$ und $a > 1$.

3.3 Der Basiswechselsatz

Wie kann man $x = \log_2 3$ berechnen? Auf dem Taschenrechner findet man nur die Tasten log und ln, und die entsprechen dem *dekatischen* Logarithmus $\log_{10}$ zur Basis 10 und dem *natürlichen* Logarithmus ln zur Basis e, nicht aber $\log_2$ Mit etwas Geduld findet man $1 < x < 2$, $1.5 < x < 1.6$, $1.58 < x < 1.59$ und so weiter durch Ausprobieren, aber das ist eine mühsame Arbeit.

Aus $b^{\log_b c} = c$ gemäss (1) folgt $\log_a \left(b^{\log_b c}\right) = log_a c$ und mit (5) folgt weiter $\log_b c \cdot \log_a b = \log_a c$ oder

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \qquad\qquad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \tag{6}$$

etwas umgestellt. Diese beiden Beziehungen sind die Quintessenz des so genannten *Basiswechselsatzes*. Die Version rechts erlaubt es, den Logarithmus zu jeder Basis mit irgendeiner Basis zu berechnen.

Bemerkung:
Weil sich wie oben erwähnt jede Zahl $a > 0$ als $a = e^c$ darstellen lässt, kann jede Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ durch eine natürliche Exponentialfunktion $x \mapsto a^x = (e^c)^x = e^{c \cdot x}$ mit $c = \ln a$ ersetzt werden. (Das ist eine Art Basiswechselsatz für Potenzen.)

4 Logarithmus- und Exponentialgleichungen

4.1 Konsequenz der strengen Monotonie

Weil für $a > 0$, $a \neq 1$ und $x_1 \neq x_2$ aus der strengen Monotonie der Exponential- und Logarithmusfunktionen folgt, dass $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ und $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$ gelten muss, ändert sich die Lösungsmenge der Gleichung $T_1 = T_2$ nicht, wenn man sie durch $a^{T_1} = a^{T_2}$ oder $\log_a T_1 = \log_a T_2$ ersetzt.

Beispiel:
Die Gleichung $2^x = 32$ lässt sich durch $\ln(2^x) = x \cdot \ln(2) = \ln(32)$ lösen.

4.2 Kompliziertere Gleichungen

Wie man lineare oder quadratische Gleichungen löst, ist bekannt. Es kommen aber manchmal auch schwierigere Gleichungen vor. Die *Logarithmusgleichung* $3 \cdot \log_a x = 2 \cdot \log_a 8$ ist ein Beispiel, das erst mit (5) in $\log_a (x^3) = \log_a (8^2)$ und danach in $x^3 = 8^2$ umgewandelt werden kann.

Ein anderes, ebenfalls einfaches Beispiel ist die *Exponentialgleichung* $3 \cdot 2^x = 24$, die erst in $2^x = 8$ umgeformt und danach direkt gelöst oder zu $x \cdot \log_a 2 = \log_a 8$ logarithmiert werden kann.

4.3 Logarithmieren und Substitution

Kann man eine Exponentialgleichung so umformen, dass nur noch eine Basis vorkommt, so kann sie eventuell durch Logarithmieren gelöst werden.

Beispiel:
Die Gleichung $3^x \cdot 9^x = 27$ kann zu $3^x \cdot 3^{2x} = 3^3$ und weiter zu $3^{2x+x} = 3^3$ umgeformt werden, sodass $2x + x = 3x = 3$ folgt.

Das geht nicht immer. Ein weiterer Lösungsansatz ist, nach Möglichkeiten zu suchen, die Gleichung mit Substitution in eine bekannte Form zu bringen.

Beispiel:
Die Gleichung $4^x + 3 \cdot 2^x - 88 = 0$ lässt sich wegen dem Term -88 nicht wie oben lösen, kann aber zu $(2^x)^2 + 3 \cdot 2^x - 88 = 0$ und mit der Substitution $y = 2^x$ in die gewöhnliche quadratische Gleichung $y^2 + 3 \cdot y - 88 = 0$ umgeformt werden. Diese Gleichung hat die zwei Lösungen $y_1 = 8$ und $y_2 = -11$. Macht man die Substitution rückgängig, so führt $y_1 = 8 = 2^x$ zur Lösung $x = 3$. Die Lösung $y_2 = -11$ führt hingegen zu keiner Lösung für x, weil 2^x nicht negativ sein kann.