Elektrodynamik

Rainer Hauser

Januar 2015

1 Einleitung

1.1 Vektorfelder

Wenn man jedem Punkt im Raum eine physikalische Grösse zuordnen kann, spricht man von einem Feld. Die Temperatur ist ein skalares Feld, während die elektrische Kraft eine Richtung hat und damit ein *Vektorfeld* ist. Zur Darstellung eines Vektorfeldes zeichnet man häufig die so genannten *Feldlinien*. Sie zeigen die Bahnen, auf denen ein Objekt entlang den Vektoren geführt wird. Im Kraftfeld der Gravitation beispielsweise zeigen sie, wie sich Massenpunkte durch die Gravitation der umliegenden Körper bewegen.

Das Vektorfeld der elektrischen Kraft heisst *elektrisches Feld* und kann theoretisch mit einer kleinen Punktladung Q_P bestimmt werden, indem man an jedem Punkt im Raum misst, welche elektrische Kraft auf diese Punktladung wirkt. Ist $\vec{F}_E$ die elektrische Kraft an der gemessenen Stelle im Raum und ist Q_P die als Probeladung benutzte Punktladung, so ist das elektrische Feld an diesem Punkt im Raum durch $\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{Q_P}$ gegeben. Weil die Ladung Q_P das zu messende elektrische Feld stört, ist

$$\vec{E} = \lim_{Q_P \to 0} \frac{\vec{F}_E}{Q_P}$$

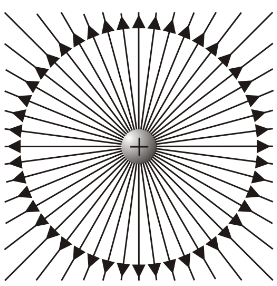
die korrekte Definition des elektrischen Feldes. Auch die magnetische Anziehung und Abstossung kann als Vektorfeld dargestellt und analog bestimmt werden. Es heisst das *magnetische Feld* und wird mit $\vec{B}$ bezeichnet.

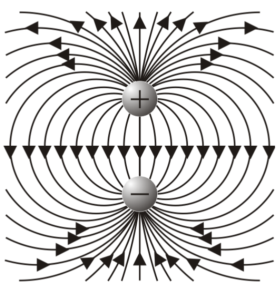
1.2 Elektrostatik

Die Elektrostatik beschäftigt sich mit elektrischen Feldern, die sich mit der Zeit nicht verändern. Zwei im Abstand r ruhende Ladungen Q_1 und Q_2 bilden eine Situation, die durch die Elektrostatik untersucht wurde. Die elektrische Kraft F_E, die zwischen diesen beiden Ladungen wirkt, ist

$$F_E = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \qquad\qquad k = 9.0 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$$

gemäss dem *Coulomb'schen Gesetz*. Der angegebene Wert von k gilt im Vakuum.





Eine positive kugelförmige Ladung Q_F wirkt auf eine positiv geladene Probeladung Q_P abstossend mit der Kraft F_E gemäss Coulomb'schem Gesetz, sodass die elektrische Feldstärke $E = k \cdot \frac{Q_F}{r^2}$ ist. Die Richtung der elektrischen Kraft ist in diesem Fall immer radial weg von der felderzeugenden Ladung wie links in der nebenstehenden Abbildung gezeigt, was eine sternförmige Anordnung der Feldlinien ergibt. Eine positive kugelförmige Ladung Q_F zusammen mit einer negativen kugelförmigen Ladung $-Q_F$ in einem Abstand hingegen zeigen ein komplizierteres Muster von Feldlinien wie rechts in der Abbildung gezeigt. Allgemein gilt für die Feldlinien von elektrischen Feldern, die von Ladungen erzeugt werden, dass sie erstens immer von positiven Ladungen ausgehen und zu negativen Ladungen führen, falls positive beziehungsweise negative Ladungen überhaupt vorhanden sind, dass sie zweitens stets senkrecht auf Leiteroberflächen stehen, und dass sie drittens einander nie schneiden.

1.3 Lorentzkraft

Untersucht man bewegte Ladungen, so verlässt man die Elektrostatik und betritt das Gebiet der Elektrodynamik. Bewegt sich beispielsweise eine elektrische Ladung Q mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein Magnetfeld $\vec{B}$, so wirkt die *Lorentzkraft*

$$\vec{F}_L = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \tag{1}$$

darauf und lenkt sie von ihrer Flugbahn ab. Ist die Ladung Q positiv und fliegt senkrecht zu den magnetischen Feldlinien, so bilden Flugrichtung, Magnetfeldlinien und Lorentzkraft ein Rechtsystem.

1.4 Partielle Ableitung

Ist eine Funktion $f(x)$ mit einem Argument gegeben, so schreibt man für die Ableitung von f nach x entweder $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ oder einfach $f'(x)$. Hat eine Funktion $f(x, y)$ hingegen zwei (oder mehr) Argumente, so gibt es eine Ableitung nach x und eine nach y. Man spricht von *partieller* Ableitung und schreibt $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ für die partielle Ableitung nach x und $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ für die partielle Ableitung nach y.

Im Folgenden werden der Gradient (oder Nabla-Operator) ∇ definiert durch

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

und zwei davon abgeleitete Operatoren benutzt. Ist $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ ein skalares Feld, so ordnet der Nabla-Operator der Funktion f den Vektor

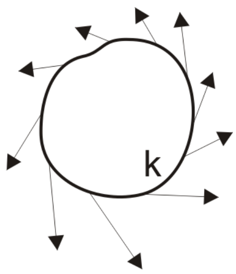
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

zu. Die abgeleiteten Operatoren Rotation und Divergenz berechnen, welche Wirbel bei infinitesimal kleinen Kurven k beziehungsweise Quellen bei infinitesimal kleinen Gebieten G vorhanden sind.

1.5 Rotation

Ist $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ ein Vektorfeld im Raum, so ist

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right)$$

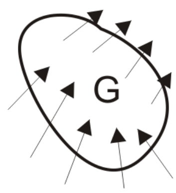


die *Rotation* des Vektorfeldes. Die Rotation ordnet einem Vektorfeld wieder ein Vektorfeld zu. Das Vektorfeld heisst *wirbelfrei*, wenn $\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{0}$ gilt.

1.6 Divergenz

Ist $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ ein Vektorfeld im Raum, so ist

$$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$



die *Divergenz* des Vektorfeldes. Die Divergenz ordnet einem Vektorfeld ein skalares Feld zu. Das Vektorfeld heisst *quellenfrei*, wenn $\mathrm{div}\vec{F} = 0$ gilt.

2 Maxwell-Gleichungen

2.1 Zeitlich veränderliche Vektorfelder

Vektorfelder können sich mit der Zeit ändern. Dafür schreibt man im Raum

$$\vec{F}(x, y, z, t) = (F_x(t), F_y(t), F_z(t))$$

mit zeitlich veränderlichen Komponenten. Die partielle Ableitung $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$ ist wieder ein Vektorfeld.

In der Elektrodynamik ändern sich das elektrische Feld $\vec{E}$, das auch *elektrische Feldstärke* heisst, und das magnetische Feld $\vec{B}$, das auch *magnetische Flussdichte* heisst, mit der Zeit. Die vier Maxwell-Gleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen den zwei Feldern und der *Ladungsdichte* ρ, also der Ladung pro Volumen, sowie der *Stromdichte* $\vec{j}$, also dem Strom pro durchflossener Fläche.

Dem leeren Raum werden die Parameter *Permittivität* ε_0 (elektrische Feldkonstante) und *Permeabilität* μ_0 (magnetische Feldkonstante) zugeordnet. Der Zusammenhang zwischen der Lichtgeschwindigkeit und den beiden Feldkonstanten ist durch

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \, \mu_0}} \tag{2}$$

gegeben. Im Folgenden werden die Maxwell-Gleichungen im leeren Raum gegeben. In Anwesenheit von Materie ändern sich die Gleichungen leicht.

2.2 Gauss'sches Gesetz

Elektrische Feldlinien divergieren voneinander unter Anwesenheit elektrischer Ladung. Die Ladung ist Quelle des elektrischen Feldes. Es gilt somit

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3}$$

für die Divergenz der elektrischen Feldstärke.

2.3 Gauss'sches Gesetz für Magnetfelder

Magnetische Feldlinien divergieren nicht, denn das Feld der magnetischen Flussdichte ist quellenfrei. Es gibt also keine magnetischen Monopole, sondern nur Dipole, wie man sie von Stabmegneten her kennt. Es gilt somit

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{4}$$

für die Divergenz der magnetischen Flussdichte.

2.4 Induktionsgesetz

Änderungen der magnetischen Flussdichte führen zu einem elektrischen Wirbelfeld. Es gilt somit

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5}$$

für die Rotation der elektrischen Feldstärke.

2.5 Durchflutungsgesetz

Elektrische Ströme, also Änderungen der elektrischen Feldstärke, führen zu einem magnetischen Wirbelfeld. Es gilt somit für die Rotation der magnetischen Flussdichte

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{6}$$

mit dem Maxwell'schen Verschiebungsstrom $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

2.6 Elektromagnetische Kraft

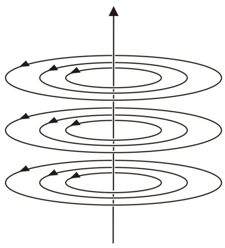
Neben den vier Maxwell-Gleichungen braucht es noch eine Erweiterung der Lorentzkraft als fünfte Grundgleichung der Elektrodynamik. Bewegt sich eine elektrische Ladung Q mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein elektromagnetisches Feld, so wirkt die erweiterte oder verallgemeinerte *Lorentzkraft*

$$\vec{F}_L = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{7}$$

darauf und lenkt sie von ihrer Flugbahn ab. Der erste Summand kommt vom elektrischen Feld $\vec{E}$ und der zweite von der Lorentzkraft (1) im magnetischen Feld $\vec{B}$.

3 Bemerkungen

3.1 Rotation im Raum



In der Ebene lässt sich die Rotation in einem Punkt dadurch bestimmen, dass man die einzelnen Vektoren auf einer geschlossenen Kurve um diesen Punkt addiert, was keine Summe, sondern ein Integral bedeutet, und die Kurve bis zum Grenzwert immer kleiner werden lässt. Gibt es einen resultierenden Vektor, so hat es Wirbel, im anderen Fall hat es keine Wirbel. Die Rotation ist also eine skalare Grösse.

Im Raum tut man dasselbe, aber man betrachtet Kurven um jede der drei Koordinatenachsen. Das Resultat ist also ein Vektor mit drei Komponenten. Die nebenstehende Abbildung zeigt die magnetischen Feldlinien um einen stromdurchflossenen Draht. Es ist offensichtlich, dass das magnetische Feld, das dadurch entsteht, Wirbel enthält. Die Rotation wird deshalb auch *Wirbeldichte* genannt.

3.2 Divergenz im Raum

Nimmt man an, man lässt unzählige winzige Probeladungen in einem elektrischen Feld los, sodass eine homogene Probeladungsdichte entsteht, und sich die Probeladungen entlang der Feldlinien bewegen, so gelangen gleich viele Probeladungen in ein Gebiet, in dem es keine Ladungen hat, wie es verlassen. Hat es in einem Gebiet hingegen eine Ladung, so fliessen bei Abstossung mehr Probeladungen aus dem Gebiet beziehungsweise bei Anziehung mehr Probeladungen in das Gebiet. Man spricht bei Abstossung von *Quellen* und bei Anziehung von *Senken*. Die Divergenz wird deshalb auch *Quellendichte* genannt.

Die unzähligen Probeladungen werden als winzig angenommen, damit sie kein eigenes elektrisches Feld erzeugen, oder dass man das von ihnen erzeugte elektrische Feld vernachlässigen kann. Magnetische Feldlinien werden häufig mit feinen Eisenspänen sichtbar gemacht. Diese Eisenspäne kann man sich als magnetische Probeladungen vorstellen.

3.3 Beispiele von elektromagnetischen Feldern

Ein homogenes elektrisches Feld, wie es in guter Näherung zwischen den Platten eines Plattenkondensators herrscht, hat keine Rotation und erzeugt somit wegen (5) ein konstantes, also homogenes magnetisches Feld. Wenn keine Ströme fliessen, wenn also die Stromdichte $\vec{j}$ verschwindet, erzeugt ein homogenes magnetisches Feld, das somit keine Rotation hat, wegen (6) ein konstantes elektrisches Feld.

Bewegt man einen Stabmagneten, so entsteht ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld, und daraus entsteht ein nicht-homogenes elektrisches Feld. Der Fahrraddynamo basiert auf diesem Effekt.

Im Vakuum, also ohne Stromdichte $\vec{j}$, kann man die letzten beiden Maxwell-Gleichungen (5) und (6) als

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad \mathrm{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

schreiben. Woher kommen aber die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ im Vakuum?

Im Vakuum können elektromagnetische Felder nicht beginnen und nicht enden. Ist aber ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld einmal da, erzeugt es ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld und umgekehrt. Dieser Prozess hört im Vakuum nie auf. Das ist das Prinzip hinter den *elektromagnetischen Wellen.* Die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \Big(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Big)$$

beschreibt eine Welle, die sich mit der Geschwindigkeit v fortbewegt. Weil sich Licht als elektromagnetische Welle herausgestellt hat, verbindet die Elektrodynamik in der Form, in die sie Maxwell gebracht hat, die früher getrennten Gebiete Elektrizität, Magnetismus und Optik.

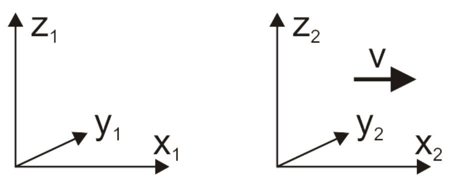
Elektrische Felder beginnen immer an Ladungen (Quellen) und enden immer an Ladungen (Senken) wegen (3), denn gemäss (4) gibt es keine magnetischen Quellen und Senken. Ladungen erzeugen elektrische Felder, reagieren aber auch gemäss der allgemeinen Lorentzkraft (7) auf elektromagnetische Felder.

3.4 Zusammenfassung der Maxwell'schen Gleichungen

Die erste Maxwell'sche Gleichung (3) ist eine Verallgemeinerung des Coulomb'schen Gesetzes und zeigt die Beziehung zwischen den elektrischen Ladungen im Raum, die als Quellen wirken, und dem elektrischen Feld auf. Die zweite Maxwell'sche Gleichung (4) zeigt dieselbe Beziehung für das magnetische Feld mit dem wesentlichen Unterschied, dass es keine magnetischen Quellen gibt und die Feldlinien somit geschlossen sind. Die dritte Maxwell'sche Gleichung (5) besagt, dass ein zeitlich veränderliches Magnetfeld ein elektrisches Feld erzeugt. Die vierte Maxwell'sche Gleichung (6) schliesslich stellt fest, dass ein Magnetfeld durch elektrische Ströme beziehungsweise zeitlich veränderliche elektrische Felder erzeugt wird.

4 Ausblick auf die Relativitätstheorie

4.1 Galilei-Transformation und Newton'sche Mechanik



Die Mechanik nach Newton ist in allen so genannten *Inertialsystemen* gleich. Inertialsysteme sind Bezugssysteme, die sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Wenn man in einem fahrenden Zug sitzt und eine Tasse Kaffee vor sich stehen hat, ist das nicht anders, als wenn man in einem Strassencafe sitzt. Erst wenn der Zug beschleunigt, bremst oder eine Kurve fährt, muss man aufpassen, dass der Kaffee nicht verschüttet.

Solche Inertialsysteme können sich beliebig schnell gegeneinander bewegen. Sind x_1, y_1, z_1 und t_1 die räumlichen und zeitlichen Koordinaten im einen und x_2, y_2, z_2 und t_2 diejenigen im anderen Bezugssystem und bewegt sich das zweite Bezugssystem mit der Geschwindigkeit v zum ersten Bezugssystem parallel zur x_1-Achse, so gelten die so genannten *Galilei-Transformationen*

$$x_2 = x_1 - v \cdot t_1 \qquad y_2 = y_1 \qquad z_2 = z_1 \qquad t_2 = t_1 \tag{8}$$

wobei der Einfachheit halber angenommen ist, die Achsen der beiden Systeme seien wie in der obigen Abbildung so gelegt, dass die entsprechenden Achsen parallel zueinander sind. Geschwindigkeiten lassen sich dabei addieren. Spaziert man in Fahrtrichtung mit 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in einem Zug, der mit 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ durch die Landschaft fährt, bewegt man sich gegenüber der Landschaft mit 105 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

4.2 Lorentz-Transformation und Maxwell'sche Elektrodynamik

In der Elektrodynamik nach Maxwell ist die Lichtgeschwindigkeit c eine spezielle Grösse, die gemäss (2) im leeren Raum nur von den zwei Naturkonstanten ε_0 und μ_0 abhängt. Sie kann somit nicht in jedem Inertialsystem verschieden sein, wenn die Physik und damit jede Naturkonstante in jedem Inertialsystem gleich ist. Entweder ist also die Formel (2) oder die Galilei-Transformation (8) falsch, oder aber es muss ein ausgezeichnetes Inertialsystem geben, in dem die Maxwell'schen Gleichungen exakt stimmen, während sie in den anderen Inertialsystemen nur näherungsweise richtig sind. Dieses ausgezeichnete Bezugssystem nannte man *Äther* und versuchte es experimentell nachzuweisen. Das berühmte Experiment von Michelson und Morley zeigte jedoch, dass es kein solches Bezugssystem gibt. Das heisst, die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich.

Damit musste man die Mechanik von Newton anpassen. Weil Lorentz die geeignete Anpassung von (8) fand, nennt man die Formeln

$$x_2 = \frac{x_1 - v \cdot t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y_2 = y_1 \qquad z_2 = z_1 \qquad t_2 = \frac{t_1 - \frac{v \cdot x_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{9}$$

Lorentz-Transformationen. Man beachte, dass erstens die Zeit nicht mehr gleich ist in den beiden Bezugssystemen, dass zweitens die Lorentz-Transformationen (9) für Geschwindigkeiten v, die klein sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c, und für die deshalb $\frac{v^2}{c^2} \approx 0$ gilt, die Galilei-Transformationen (8) als Näherung hat, und dass drittens Geschwindigkeiten nicht mehr einfach addiert werden können.

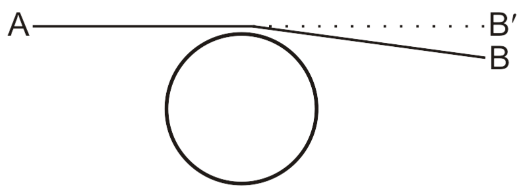
4.3 Spezielle Relativitätstheorie

Während Lorentz gemäss damaligem Weltbild der Physiker annahm, dass die Bewegung von Materie durch die Newton'sche Mechanik mit den Galilei-Transformationen (8) beschrieben wird, während seine Formeln die Bewegung von Materie im Äther beschreiben, postulierte Einstein, dass die Lorentz-Transformationen (9) die richtigen Formeln auch für die Mechanik sind, dass der Äther nicht nachweisbar ist und für die Physik nicht existiert, und dass die Lichtgeschwindigkeit c im leeren Raum konstant ist.

In seiner Theorie, die unter dem Namen *spezielle Relativitätstheorie* in die Physik eingegangen ist, hing die Elektrodynamik mit den Maxwell'schen Gleichungen (3)-(6) nicht mehr von einem speziellen Bezugssystem ab, sondern galt in jedem Inertialsystem. Dafür gab es jetzt keine absolute Zeit mehr, die in jedem Inertialsystem gleich ist, und der Begriff der Gleichzeitigkeit sowie Impuls und Energie mussten angepasst werden. Dabei entdeckte Einstein auch die berühmte Formel $E = m \cdot c^2$. Somit gelang es, die Elektrodynamik mit der Mechanik zu einer einheitliche Theorie zusammenzufassen.

4.4 Allgemeine Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie gilt jedoch nur in Abwesenheit von Gravitation. Nach zehn Jahren Arbeit konnte Einstein schliesslich eine Theorie vorlegen, die auch die Gravitation einbezog. Er nannte sie *allgemeine Relativitätstheorie*. Die wesentliche Änderung gegenüber der Newton'schen Mechanik mit den Lorentz-Transformationen (9) statt den Galilei-Transformationen (8) ist, dass der Raum in Anwesenheit von Materie gekrümmt ist.



Um von einem gekrümmten Raum sprechen zu können, muss man wissen, was man als Gerade betrachtet. Weil wir annehmen, das Licht bewege sich in gerader Richtung, nimmt man Lichtstrahlen als Geraden. Im Jahr 1919 konnte während einer Sonnenfinsternis gezeigt werden, dass das Licht von Sternen, die von der Erde aus gesehen nahe bei der Sonne liegen, wirklich durch die Schwerkraft der Sonne wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt abgelenkt werden. Befindet sich die Erde mit dem Beobachter beim Punkt A, so sieht er den Stern, der sich an der Position B befindet, an der Position B' und glaubt so, weil er den Lichtstrahl als gerade annimmt, dass sich der Stern weiter weg von der Sonne befindet, als er es wirklich ist. Dieses Ereignis machte Einstein, der diesen Effekt vorausgesagt hatte, über Nacht weltberühmt.

Nach der allgemeinen Relativitätstheorie wird der Raum durch die Materie und deren Schwerkraft gekrümmt, sodass sich Lichtstrahlen, aber auch Massenpunkte nicht mehr auf Geraden, sondern auf so genannten *geodätischen Linien* bewegen. Unter anderem dank Schwarzschild und seiner praktikablen Lösung der entstehenden Gleichungen hatte die allgemeine Relativitätstheorie eine immense Wirkung auf unser astronomisches Weltbild und brachte uns schwarze Löchern und den Urknall.