Rechnen mit Einheiten

Rainer Hauser

Mai 2016

1 Einleitung

1.1 Messgrössen im Alltag

In der Mathematik sind Zahlen abstrakte Grössen. Jeder Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengeraden. So ist beispielsweise $\sqrt{2}$ die Zahl, die mit sich selber multipliziert 2 ergibt, und das ist weder 1.41 noch 1.414213562 noch irgendeine andere Näherung.

Im Alltag und in der Physik sind Zahlen jedoch häufig *Messgrössen*, die mit einer Messungenauigkeit behaftet sind. Bastelt man zum Beispiel ein Quadrat mit genau einem Meter Seitenlänge, so wäre die Länge der Diagonale rein theoretisch $\sqrt{2}$, und zwar exakt. Weil aber niemand ein Quadrat mit einer Seitenlänge von exakt einem Meter bauen kann, ist auch die Diagonal eben nicht genau so lang. Je nach Herstellungs- und Messgenauigkeit darf man also für die Länge der Diagonale 1.41 Meter, 1.414213562 Meter oder eine andere passende Näherung von $\sqrt{2}$ schreiben.

In der Welt haben sich verschiedene Masseinheiten durchgesetzt. Längen misst man abhängig von ihrer Grössenordnung bei uns in Zentimeter, Meter, Kilometer oder einer anderen verwandten Einheit. In englischsprachigen Ländern benutzt man andere Einheiten wie Inch und Meile. Dasselbe gilt für Gewichtseinheiten (oder richtiger für Einheiten der Masse), wo bei uns Gramm, Kilogramm und Tonne verwendet werden, während im englischen Sprachraum Unzen und Pfund gebräuchlich sind. Bei der Messung von Zeitdauer haben sich Woche, Tag, Stunde, Minute und Sekunde weltweit mehr oder weniger durchgesetzt, aber schon Monate und Jahre sind nicht überall gleich. So rechnet man im christlichen Kalender mit Sonnenjahren von 365 Tagen basierend auf Sonnenmonaten und im islamischen Kalender mit Mondjahren von 354 Tagen basierend auf Mondmonaten. Schaltjahre haben in beiden Kalendern je einen Tag mehr.

1.2 Messgrössen in der Physik

Aus dem Grund, weil weltweit ein unübersichtliches Chaos von Masseinheiten besteht, hat man sich in der Physik auf ein System von Einheiten geeinigt, die man SI-Einheiten nennt. (SI ist eine Abkürzung für Système international d'unités.) Darin sind der Meter die Einheit für Längen, die Sekunde die Einheit für Zeitdauer und das Kilogramm die Einheit für Masse. Der wohl wichtigste Vorteil der metrischen Systeme, zu denen auch die SI-Einheiten gehören, ist die Verwendung des Zehnersystems. Die englische Meile entspricht 1760 Yard, eine Yard ist drei Fuss und ein Fuss entspricht zwölf Inch (oder Zoll). Das ist vor allem für Menschen, die nicht in diesem System aufgewachsen sind, äusserst unübersichtlich. Ein Kilometer ist zehn Hektometer, ein Hektometer ist zehn Dekameter, ein Dekameter ist zehn Meter, ein Meter ist zehn Dezimeter, ein Dezimeter ist zehn Zentimeter, und ein Zentimeter ist zehn Millimeter. Das ist viel einfacher, und man kann Untereinheiten ohne viel zu rechnen überspringen, was etwa von einem Hektometer zu hundert Meter führt. (Bei der Zeit mit einem Tag von vierundzwanzig Stunden, einer Stunde von sechzig Minuten und einer Minute von sechzig Sekunden ist aber auch bei uns die Basis nicht das Zehnersystem.)

In der Physik benutzt man häufig die Masseinheiten ohne Vorsätze wie Dezi und Milli. Weil dabei sehr grosse und sehr kleine Zahlen entstehen können, schreibt man die Zahlen als Produkt mit einer Zehnerpotenz. Ein Tag mit 86 400 Sekunden wird als $8.64 \cdot 10^4$ Sekunden geschrieben, und vier Tausendstel Sekunden schreibt man als $4 \cdot 10^{-3}$ Sekunden.

1.3 Vorsätze für Masseinheiten

Die so genannten Vorsätze wie Milli, Zenti und Dezi gelten für alle Einheiten und nicht nur für Meter. So sind zehn Milliliter ein Deziliter und hundert Liter ein Hektoliter. Gewisse so entstehende Einheiten wie zum Beispiel Dekameter und Hektometer sind nicht sehr gebräuchlich, was aber nicht heisst, dass man sie nicht benutzen darf. Es gibt zudem mehr dieser Vorsätze als hier beschrieben. So entspricht beispielsweise ein Picometer 10^{-12} Meter und ein Terameter 10^{12} Meter.

Das System der Vorsätze erlaubt es, von 10^{-24} bis 10^{24} teilweise in Tausenderschritten und teilweise in Zehnerschritten zu grösseren und kleineren Einheiten überzugehen. Auf diese Weise kann man Einheiten umrechnen. Nimmt man eine grössere Einheit in einem Zehnerschritt, so wird die gemessene Zahl ebenfalls in einem Zehnerschritt kleiner, und umgekehrt. Geht man zum Beispiel von der Einheit Dezimeter zur grösseren Einheit Meter, so wird aus 450 Dezimeter umgerechnet 45 Meter.

Für Einheiten benutzt man Abkürzungen. So schreibt man 15 m für fünfzehn Meter, 7 s für sieben Sekunden und 100 g für hundert Gramm. Auch die Vorsätze haben Abkürzungen. So steht c für Zenti, sodass 12 cm für zwölf Zentimeter steht. Die Abkürzungen für die gebräuchlicheren Vorsätze werden im Folgenden als bekannt vorausgesetzt.

2 Addition und Subtraktion von Messgrössen

2.1 Gleiche Einheiten

Wenn man Messwerte addiert oder subtrahiert, müssen die Messwerte die gleichen Einheiten haben. Das heisst einerseits, dass man fünf Kilogramm und drei Meter nicht zusammenzählen kann, weil sich Kilogramm nicht in Meter umrechnen lässt. Das heisst aber andererseits, dass man Einheiten, die sich ineinander umrechnen lassen, erst so umrechnen muss, dass sie die gleichen Vorsätze haben. So ergibt $1\,\mathrm{m} + 80\,\mathrm{cm}$ entweder mit $100\,\mathrm{cm} + 80\,\mathrm{cm}$ das Ergebnis $180\,\mathrm{cm}$ oder mit $1\,\mathrm{m} + 0.8\,\mathrm{m}$ das Resultat $1.8\,\mathrm{m}$. Selbstverständlich hätte man auch beide zu addierenden Grössen in Dezimeter umwandeln und addieren dürfen. Wichtig ist, dass die beiden Grössen in denselben Einheiten angegeben werden.

Wenn jemand von sich sagt, er sei ein Meter achtzig gross, so meint er eigentlich ein Meter plus achtzig Zentimeter. Das ist also genau besehen keine Messgrösse, sondern eine Rechnung. Weil sie aber so einfach ist, merkt man gar nicht, dass hier eine Addition stattfinden muss.

2.2 Einheiten umrechnen

Um Messgrössen zu addieren oder subtrahieren müssen sie in denselben Einheiten und mit denselben Vorsätzen angegeben werden. Ist dies nicht der Fall, muss einen Teil von ihnen umrechnen. Soll man zwei Zentimeter zu drei Zoll addieren, muss man entweder Zentimeter in Zoll oder Zoll in Zentimeter umrechnen, was $2\,\mathrm{cm} + 7.62\,\mathrm{cm} = 9.62\,\mathrm{cm}$ ergibt, weil ein Zoll $2.54\,\mathrm{cm}$ entspricht.

Die Verwendung des Zehnersystems bei den metrischen Systemen macht die Umrechnung von einem Vorsatz in einen anderen aber einfacher. Will man beispielsweise $4.75\,\mathrm{m}$ in Millimeter umrechnen, so gilt $4.75\,\mathrm{m} = 4.75 \cdot (1\,\mathrm{m}) = 4.75 \cdot (1000\,\mathrm{mm}) = 4.75 \cdot 1000\,\mathrm{mm} = 4750\,\mathrm{mm}$. Will man umgekehrt $12.8\,\mathrm{dm}$ in Meter umrechnen, so gilt $12.8\,\mathrm{dm} = 12.8 \cdot (1\,\mathrm{dm}) = 12.8 \cdot (0.1\,\mathrm{m}) = 12.8 \cdot 0.1\,\mathrm{m} = 1.28\,\mathrm{m}$. Man braucht also nur zu wissen, dass $1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{dm}$ oder $1\,\mathrm{dm} = 0.1\,\mathrm{m}$ ist. Multiplikation mit Zehnerpotenzen im Zehnersystem bedeutet einfach, dass der Dezimalpunkt nach links oder rechts verschoben wird.

Auf dieselbe Weise lassen sich aber auch Zeiteinheiten ineinander umrechnen, auch wenn sich die dabei entstehenden Multiplikationen nicht mehr einfach als Multiplikation mit einer Zehnerpotenz schreiben lassen. Will man dreieinhalb Stunden in Minuten oder Sekunden umrechnen, so ergibt das die Rechnung $3.5\,\mathrm{h} = 3.5 \cdot (1\,\mathrm{h}) = 3.5 \cdot (60\,\mathrm{min}) = 210 \cdot (1\,\mathrm{min}) = 210 \cdot (60\,\mathrm{s}) = 12\,600\,\mathrm{s}$. Dreieinhalb Stunden sind also gleich viel wie 210 Minuten oder 12 600 Sekunden. Will man jetzt umgekehrt 1860 Sekunden in Minuten oder Stunden umrechnen, geht man gleich vor und rechnet $1860\,\mathrm{s} = 1860 \cdot (1\,\mathrm{s}) = 1860 \cdot (\frac{1}{60}\,\mathrm{min}) = 31\,\mathrm{min}$ zuerst und $31 \cdot (1\,\mathrm{min}) = 31 \cdot (\frac{1}{60}\,\mathrm{h})$ anschliessend. Weil 31 nicht durch 60 teilbar ist, lässt man das Resultat entweder in der Form $\frac{31}{60}\,\mathrm{h}$ stehen oder rundet es auf etwa auf $0.517\,\mathrm{h}$.

Weil eine Multiplikation mit einer Zehnerpotenz bei einem Dezimalbruch einfach ein Verschieben des Dezimalpunktes bedeutet, tauchen bei den Einheiten Meter oder Kilogramm keine Probleme auf wie bei der Zeit, bei der die Umrechnung von Tagen in Stunden, von Stunden in Minuten oder von Minuten in Sekunden wegen dem Faktor 3 in den Zahlen 24 und 60 aus endlichen Dezimalbrüchen unendliche machen kann. (Im Laufe der Französischen Revolution hätten neben der Einheit Meter für die Länge auch die Einheiten für die Zeit durch dezimale Einheiten ersetzt werden sollen. Das hat sich aber nicht durchgesetzt.)

3 Multiplikation und Division von Messgrössen

3.1 Zusammengesetzte Einheiten

Messgrössen mit gleichen oder verschiedenen Einheiten kann man beliebig multiplizieren und dividieren. Multipliziert man beispielsweise zwei Meter mit drei Meter, um die Fläche eines Rechtecks mit diesen Seitenlängen zu bekommen, so ergibt das $2\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} = 2 \cdot (1\,\mathrm{m}) \cdot 3 \cdot (1\,\mathrm{m}) = 6 \cdot (1\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m}) = 6 \cdot (1\,\mathrm{m}^2) = 6\,\mathrm{m}^2$. Dividiert man, um ein Beispiel zu bringen, in dem verschiedene Einheiten vorkommen, 120 Kilometer durch anderthalb Stunden, so ergibt das

$$\frac{120\,\mathrm{km}}{1.5\,\mathrm{h}} = \frac{120}{1.5} \cdot \frac{1\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

als Resultat, was eine Geschwindigkeit darstellt. Die zusammengesetzte Einheit $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ nennt man Kilometer pro Stunde. In SI-Einheiten benutzt man Meter pro Sekunde für Geschwindigkeiten und schreibt $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Zusammengesetzte Einheiten kommen in der Physik überall vor. So hat die Beschleunigung $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ als Einheit und damit die Kraft als Masse mal Beschleunigung die Einheit $\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Weil komplexe Einheiten so unübersichtlich werden, hat man Namen und Abkürzungen für häufig gebrauchte zusammengesetzte Einheiten eingeführt. Newton als Einheit für die Kraft mit der Abkürzung N ist ein Beispiel dafür.

3.2 Spezielle Einheiten

Speziell erwähnenswert sind die beiden Einheiten Liter und Are. Sie sind eigentlich ebenfalls neue Einheiten als Ersatz für zusammengesetzte Einheiten, werden aber nicht mehr als solche empfunden, weil sie so häufig gebraucht werden.

Ein Liter ist ein Mass für Volumen, für das man in SI-Einheiten m^3 benutzt. Ein Liter entspricht einem Kubikdezimeter, was als $1\,\mathrm{l} = 1\,\mathrm{dm}^3$ geschrieben werden kann. Liter ist die übliche Masseinheit für Getränke. Es käme wohl kaum jemandem in den Sinn, in einem Einkaufsladen nach einem Kubikdezimeter Milch zu fragen.

Die Are (oder der Ar) ist ein Flächenmass, das hundert Quadratmeter entspricht, und das bei uns vor allem für die Angabe von Grundstückgrössen benutzt wird. Weil die Abkürzung a sowohl für die Are als auch für das Jahr benutzt wird, ist die Are nur dort einzusetzen, wo keine Verwechslung möglich ist.

3.3 Einheiten kürzen

Einheiten kann man wie gemeinsame Faktoren in einem Bruch kürzen. Das Volumen V eines Prismas beispielsweise lässt sich als Produkt von Grundfläche G mal Höhe h berechnen. Ist somit das Volumen $V = 12\,\mathrm{m}^3$ und die Grundfläche $G = 2\,\mathrm{m}^2$ gegeben, kann man die Höhe h mit

$$h = \frac{V}{G} = \frac{12\,\mathrm{m}^3}{2\,\mathrm{m}^2} = \frac{12}{2}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^2} = 6\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^2} = 6\,\frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^2} = 6\,\mathrm{m}$$

berechnen.

Kommen in einer Berechnung verschiedene Vorsätze derselben Einheit vor, so muss man sie erst in die gleichen Vorsätze umrechnen, bevor man sie kürzen kann. Will man beispielsweise den Farbverbrauch von 0.3 Liter Farbe pro Quadratmeter für das Streichen einer Hauswand kürzen, muss man erst Liter in Kubikdezimeter und anschliessend Kubikdezimeter in Kubikmeter umrechnen. Das heisst, man muss

$$0.3\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{m}^2} = 0.3\,\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{m}^2} = 0.3\frac{(0.1\,\mathrm{m})^3}{1\,\mathrm{m}^2} = 0.3\cdot 0.001\cdot\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^2} = 0.0003\,\mathrm{m} = 0.3\,\mathrm{mm}$$

berechnen. (Streicht man also eine Wand mit diesem Farbverbrauch gleichmässig, so entsteht eine Farbschicht von 0.3 Millimeter Dicke.)

3.4 Zusammengesetzte Einheiten umrechnen

Will man zusammengesetzte Einheiten umrechnen, so geht man grundsätzlich gleich vor wie bei einfachen Einheiten. Das sei wieder an einem Beispiel gezeigt. Weil die doppelte Menge von einem Material die doppelte Masse hat, ist die Dichte eines Materials definiert als Masse pro Volumen eine charakteristische Grösse für ein Material. Die Dichte von Gold ist etwa $19\,300\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Weil man sich einen Block von einem Kubikmeter mit einer Masse von fast zwanzig Tonnen schlecht vorstellen kann, rechnen wir das mit

$$19\,300\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 19\,300\frac{1\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{m}^3} = 19\,300\frac{1000\,\mathrm{g}}{(100\,\mathrm{cm})^3} = 19\,300\frac{1000\,\mathrm{g}}{1\,000\,000\,\mathrm{cm}^3} = 19.3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

in Gramm pro Kubikzentimeter um, was man sich etwas besser vorstellen kann.

Trickreicher sind Umrechnungen, bei denen Zeitdauer involviert ist. Die Geschwindigkeit von $90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ entspricht

$$90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 90\cdot\,\frac{1\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = 90\cdot\,\frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 90\cdot\,\frac{1\,\mathrm{m}}{3.6\,\mathrm{s}} = \frac{90}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

in SI-Einheiten.

4 Zusammenfassung

4.1 Rechnen mit Messgrössen

Mit Messgrössen, die eine Einheit haben, kann man rechnen. Addieren und Subtrahieren kann man nur Messgrössen mit gleichen Einheiten. Multiplizieren und Dividieren kann man hingegen alle möglichen Messgrössen, solange man nicht durch Null dividiert.

Kommen in einer Addition oder einer Subtraktion verschiedene Vorsätze derselben Einheit vor, so muss man dafür sorgen, dass alle dieselben Vorsätze haben, bevor man das Ergebnis berechnen kann. Kommen in einer zusammengesetzten Einheit im Zähler und Nenner verschiedene Vorsätze derselben Einheit vor, muss man auch hier in die gleichen Vorsätze umrechnen, bevor man die Einheiten kürzen kann.

4.2 Plausibilitätsüberlegungen

Beim Umrechnen von Einheiten in andere Einheiten können – wie bei allen Berechnungen – Fehler entstehen. Es lohnt sich deshalb, ein Ergebnis auf seine Plausibilität zu prüfen. Bekommt man beim Umrechnen von weniger als einem Liter mehrere Kubikmeter, so kann etwas nicht stimmen, denn ein Liter ist eine recht handliche Grösse, während schon ein Kubikmeter riesig im Vergleich dazu ist. Auch beim Umrechnen von Geschwindigkeiten passieren leicht Fehler. Die Geschwindigkeit von einem Meter pro Sekunde entspricht gemütlichem Spazieren. Bekommt man also beim Umrechnen eine Geschwindigkeit von sechsunddreissig Kilometer pro Stunde, kann etwas nicht stimmen, denn das schafft eine untrainierte Person nicht einmal mit einem Fahrrad.

Wenn man sich ein paar Referenzgrössen merkt, hilft das bei Plausibilitätsüberlegungen. Streckt man beide Arme seitlich aus, so ist der Abstand zwischen den Fingerspitzen eine Länge zwischen anderthalb und zwei Metern. Besonders für Geschwindigkeiten gibt es ein paar Referenzgrössen. Spazieren hat eine Geschwindigkeit von einem bis anderthalb Meter pro Sekunde. Menschen erreichen beim Rennen maximal Geschwindigkeiten von zehn Meter pro Sekunde. Ein Auto, das mit sechzig Kilometer pro Stunde fährt, braucht eine Minute pro Kilometer. Diese Beispiele mögen an dieser Stelle genügen.