Differenzial- und Integralrechnung V

Rainer Hauser

Dezember 2013

1 Einleitung

1.1 Rationale Funktionen

Rationale Funktionen sind Funktionen in der Form von Brüchen, deren Zähler und Nenner Polynome sind. Durch vollständiges Faktorisieren von Zähler und Nenner und anschliessendem Kürzen kann man gemeinsame Faktoren eliminieren und auf diese Weise so genannte behebbare Definitionslücken beheben. Damit haben Zähler und Nenner keine gemeinsamen Nullstellen mehr. Die Nullstellen des Zählers sind deshalb auch die Nullstellen der rationalen Funktion, während die Nullstellen des Nenners nicht behebbare Definitionslücken sind und Pole genannt werden. Die Graphen von rationalen Funktionen haben vertikale Asymptoten bei den Polen. Ist der Grad des Nennerpolynoms grösser als derjenige des Zählerpolynoms, so bildet die x-Achse eine horizontale Asymptote. Sind Zähler- und Nennerpolynom vom gleichen Grad, so gibt es ebenfalls eine horizontale Asymptote, die aber nicht mehr mit der x-Achse zusammenfällt. Ist der Grad des Zählerpolynoms grösser als derjenige des Nennerpolynoms, so sind auch krummlinige asymptotische Kurven möglich.

1.2 Ableitung und Integral

Polynome lassen sich mit Hilfe der Summen- und Faktorregel, die durch die Formeln

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(af(x) + b\,g(x)) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x) + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}g(x) \qquad \int (af(x) + b\,g(x))\,\mathrm{dx} = a\int f(x)\,\mathrm{dx} + b\int g(x)\,\mathrm{dx}$$

zusammengefasst werden können, sowie der Potenzregel einfach ableiten und integrieren.

Mit Hilfe der Quotientenregel lassen sich rationale Funktionen ableiten. Sind Zähler- oder Nennerpolynom faktorisiert, muss man sie zum Ableiten nicht ausmultiplizieren, sondern kann die Produktregel benutzen. Das Integrieren von rationalen Funktionen ist hingegen nicht so einfach.

2 Kettenregel

2.1 Verkettung von Funktionen

Ist beispielsweise $f(x) = 3x + 2$ und $g(x) = x^2$, so ist die *zusammengesetzte Funktion* bekanntlich definiert durch $g \circ f(x) = g(f(x)) = (3x + 2)^2$. Ist $f\colon x \mapsto y = f(x)$ und $g\colon y \mapsto z = g(y)$, so gilt für die Zusammensetzung $g \circ f\colon x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x))$. Die Funktion f heisst *innere* und die Funktion g heisst *äussere* Funktion.

Ist $x \mapsto y = f(x)$ und $g\colon y \mapsto z = g(y)$, so ist die Ableitung von $g \circ f$ durch die *Kettenregel*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(g \circ f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \tag{1}$$

bestimmt. Man schreibt meist einfacher $\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dy}} \cdot \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ für die Funktionen $y = y(x)$ und $z = z(y) = z(y(x))$.

Beispiel:
Ist $h\colon x \mapsto \sqrt{x^2+3}$, so kann diese Funktion als $h = g \circ f$ zusammengesetzt aus den beiden Funktionen $f\colon x \mapsto x^2+3$ und $g\colon x \mapsto \sqrt{x}$ betrachtet werden. Mit $f'(x) = 2x$ und $g'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ gilt also für die Ableitung $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Die Kettenregel folgt aus

$$\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h} = \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

durch Einsetzen von $k = f(x+h) - f(x)$ und $f(x+h) = f(x) + k$. Man bekommt

$$\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h} = \frac{g(f(x)+k)-g(f(x))}{k}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{g(y+k)-g(y)}{k}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

mit $y = f(x)$ und kann die beiden Grössen h und k wie üblich nach 0 gehen lassen.

2.2 Integrieren durch lineare Substitution

Ist die Funktion $f(x)$ von der Form $g(ax+b)$, so ergibt sich eine Stammfunktion F, indem man $ax+b$ durch t ersetzt, von $t \mapsto g(t)$ eine Stammfunktion $t \mapsto G(t)$ ermittelt und zum Schluss die Substitution wieder rückgängig macht, was als

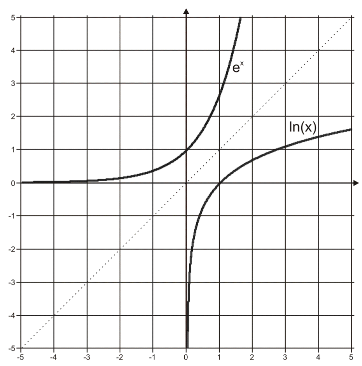
$$f(x) = g(ax+b) \qquad\qquad F(x) = \frac{1}{a}G(ax+b) \tag{2}$$

zusammengefasst werden kann. Diese als *Integrieren durch lineare Substitution* bezeichnete Methode kann durch die Kettenregel mit $F'(x) = \frac{1}{a}G'(ax+b)\cdot a = g(ax+b) = f(x)$ bewiesen werden.

Beispiel:
Ist $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4x+1}}$, so kann mit $g(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ und $G(t) = \sqrt{t} + c$ die Funktion $F(x) = \dfrac{1}{4}\sqrt{4x+1} + c$ als Stammfunktion von $f(x)$ bestimmt werden.

2.3 Umkehrfunktion

Wenn $f\colon a \mapsto b$ eine Zuordnung ist, so ordnet $f^{-1}\colon b \mapsto a$ dieselben Elemente miteinander vertauscht zu. Ist f eine Funktion, so gilt $f(a) = b$ und $f^{-1}(b) = a$. Allgemein gilt also mit $y = f(x)$ auch $x = f^{-1}(y)$, aber dazu müssen die Zuordnungen $x \mapsto f(x)$ und $y \mapsto f^{-1}(y)$ eindeutig sein. Andernfalls muss der Wertebereich eingeschränkt werden, um diese Zuordnungen eindeutig zu machen.



Beispiel:
ist $f(x) = x^2$, so ist $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, wenn man die Werte von x auf $x \geq 0$ einschränkt.

Der Graph der Umkehrfunktion ist der an der Winkelhalbierenden $y = x$ gespiegelte Graph der ursprünglichen Funktion, wie man an der nebenstehenden Abbildung sieht, in der die Graphen der Funktionen e^x und $\ln(x)$ abgebildet sind. Die Funktion e^x bildet $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}_+$ ab, und die Logarithmusfunktion ist somit nur auf $\mathbb{R}_+$ definiert.

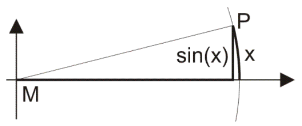
Die Ableitung der Umkehrfunktion lässt sich mit der Kettenregel (1) finden. Wegen $g(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ gilt $g'(x) = 1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$ und weiter

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{3}$$

die Ableitung der Umkehrfunktion.

3 Ableitung und Integral weiterer Funktionen

3.1 Trigonometrische Funktionen



Legt man einen Einheitskreis mit Mittelpunkt M so in ein Koordinatensystem, dass M im Ursprung liegt, so hat ein Punkt P auf dem Kreis die Koordinaten $(\cos(x), \sin(x))$, wobei x der Kreisbogen von der x-Achse zum Punkt P ist. Wie man in der nebenstehenden Abbildung sieht, sind die Längen x und $\sin(x)$ für kleine Werte x fast gleich. Das heisst aber, dass die Sinusfunktion bei $x = 0$ die Steigung 1 hat. Weiter ist die Steigung der Sinusfunktion bei $x = \pm\frac{\pi}{2}$ offensichtlich 0, weil sich dort ein lokales Minimum beziehungsweise Maximum befindet. Diese Überlegungen mögen hier genügen, um die folgenden Regeln zu begründen. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sin(x) = \cos(x) \qquad \int \sin(x)\,\mathrm{dx} = -\cos(x) + c \tag{4}$$

für die Sinusfunktion und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \cos(x) = -\sin(x) \qquad \int \cos(x)\,\mathrm{dx} = \sin(x) + c \tag{5}$$

für die Cosinusfunktion. Für die Tangens- und Cotangensfunktion findet man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \cot(x) = -\frac{1}{\sin(x)^2}$$

mit der Quotientenregel und mit $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

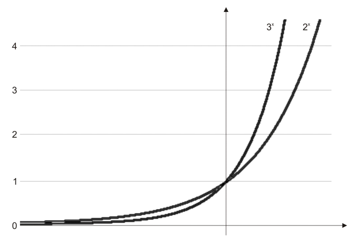
Beispiel:

Integrale sind nicht immer leicht zu finden, aber mit der Folgerung $\int f'(x) \cdot (f(x))^n\,\mathrm{dx} = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1}$ aus der Produkt- oder Kettenregel beispielsweise lassen sich kompliziertere Integrale wie das Integral

$$\int \cos(x) \cdot \sin(x)^2\,\mathrm{dx} = \frac{\sin(x)^3}{3} + c$$

bestimmen.

3.2 Exponentialfunktion



Die Logarithmusfunktion $\log_a(x)$ ist die Umkehrfunktion von a^x. Um die Ableitung der Funktion $f(x) = a^x$ zu bekommen, formt man den Differenzialquotient folgendermassen

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

um. Wegen

$$f'(x) = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

ist der Grenzwert nur vom Wert a, nicht aber von x abhängig. Approximiert man den Grenzwert für $a = 2$, bekommt man einen Wert, der kleiner als 1 ist, während man für $a = 3$ einen Wert grösser als 1 bekommt. Somit stellt sich die Frage, ob in der obigen Abbildung zwischen den Graphen von 2^x und 3^x der Graph einer Exponentialfunktion a^x liegt, für die

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$$

gilt. Es gibt so eine Funktion mit $a = e \approx 2.71828$ der Euler'schen Zahl. Es gilt somit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} e^x = e^x \qquad \int e^x\,\mathrm{dx} = e^x + c \tag{6}$$

für diese Exponentialfunktion.

Für die Exponentialfunktionen von der Form $f(x) = b \cdot a^x$ mit einer beliebigen Basis a lassen sich Ableitung und Integral aus $f(x) = b \cdot a^x = b \cdot (e^{\ln(a)})^x = b \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$ mit der Kettenregel (1) und der linearen Substitution (2) bestimmen und lassen sich also auf die Basis e zurückführen. Für die allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$ gilt $f'(x) = b \cdot k \cdot e^{k \cdot x}$ und $\int b \cdot e^{k \cdot x} \, \mathrm{dx} = \frac{b}{k} \cdot e^{k \cdot x} + c$.

3.3 Logarithmusfunktion

Weil $\ln(x)$ die Umkehrfunktion von e^x ist, gilt für $f(x) = e^x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \ln(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

nach (3), woraus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \ln(|x|) = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x} \, \mathrm{dx} = \int x^{-1} \, \mathrm{dx} = \ln(|x|) + c \tag{7}$$

für die Ableitung und das Integral folgt. (Damit ist auch das Integral für $f(x) = x^n$ mit $n = -1$ gefunden, das sich mit der Potenzregel nicht bestimmen lässt.)

Die allgemeine Logarithmusfunktion $f(x) = \log_a(x)$ lässt sich mit dem Basiswechselsatz für den Logarithmus $\log_a(b) \cdot \log_b(c) = \log_a(c)$ bestimmen. Wegen $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ folgt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$ für alle $a > 0$.

Beispiel:
Man löst $\int_0^2 \frac{5}{3x+2} \, \mathrm{dx} = \left[\frac{5}{3} \cdot \ln(|3x+2|)\right]_0^2 = \frac{5}{3}\big(\ln(8) - \ln(2)\big) = \frac{5}{3} \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \frac{5}{3} \ln(4)$ mit linearer Substitution (2).

Weil beim Logarithmus nur positive Werte von x erlaubt sind, die Funktion $x \mapsto x^{-1}$ aber ausser für $x = 0$ überall auf $\mathbb{R}$ definiert ist, hat man die Ableitung und das Integral in (7) mit einem eleganten Trick auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ausgedehnt. Mit $\ln(|x|)$ wird die Logarithmusfunktion als $\ln(-x)$ auf negative x erweitert.

4 Anwendungen

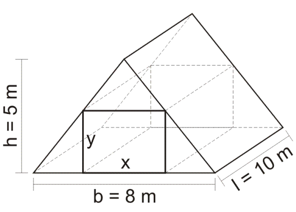
4.1 Extremwertaufgaben

Probleme mit Extremwerten sind häufig. In der Wirtschaft will man beispielsweise den Gewinn maximieren und die Kosten minimieren. Bei Extremwertaufgaben geht man wie folgt vor:

1. Man bestimmt eine Formel für die Grösse, die extremal gemacht werden soll.
2. Durch Nebenbedingungen eliminiert man alle Variablen bis auf eine.
3. Man untersucht, für welchen Definitionsbereich die Formel sinnvoll ist.
4. Man bestimmt die Stellen, für die die durch die Formel ausgedrückte Funktion extremal ist.

Man beachte, dass die extremalen Stellen auch auf dem Rand des Definitionsbereichs liegen können.

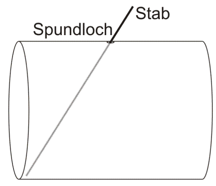
Beispiel:
In einem Dachstock möchte der Besitzer des Hauses einen Raum wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt einrichten. Der Raum in der Form eines Quaders soll ein möglichst grosses Volumen haben.

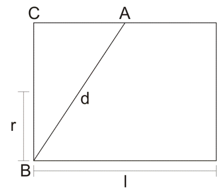


Im ersten Schritt bestimmt man eine Formel für das Volumen, das maximiert werden soll. Man macht also den Ansatz $V = x \cdot y \cdot 10$, wobei man die Einheit Meter weglassen kann, weil alle Masse in Meter angegeben sind. Im zweiten Schritt versucht man, y durch x und die gegebenen Grössen auszudrücken. Aus den Strahlensätzen folgt $x : 8 = (5 - y) : 5$, womit man $y = 5 - \frac{5}{8}x$ in der obigen Formel einsetzen und $V = x \cdot (5 - \frac{5}{8}x) \cdot 10$ bekommen kann.

Diese Formel liefert, wie man sich im dritten Schritt überlegt, für x-Werte im offenen Intervall von 0 bis 8 ein Volumen $V > 0$. Der Definitionsbereich ist also $0 < x < 8$. Im vierten und letzten Schritt bestimmt man die extremalen Stellen durch Ableiten der Funktion $V(x) = x \cdot (5 - \frac{5}{8}x) \cdot 10 = 50x - \frac{25}{4}x^2$ und bekommt aus $V'(x) = 50 - \frac{25}{2}x$ den stationären Punkt $x = 4$. Ist $x = 4\,\mathrm{m}$, so ist $y = 2.5\,\mathrm{m}$ und das maximale Volumen ist somit $V_{max} = 100\,\mathrm{m}^3$.

Manchmal haben Extremwertaufgaben auch einen Parameter wie im folgenden historischen Beispiel. Zur Zeit von Johannes Kepler hat man das Volumen eines Fasses höchst ungenau damit bestimmt, dass man einen Stab ins Spundloch gesteckt hat und die maximal mögliche Länge des Stabes im Fass wie in der nebenstehenden Abbildung dargestellt bestimmt hat. Ein Fass mit sehr grosser Länge l und sehr kleinem Radius r hat zwar ein kleines Volumen, aber die Länge d des Stabes kann so sehr gross gemacht werden. Da zu jener Zeit die Fässer zum Transport von Flüssigkeiten hergestellt wurden, gab es keine Fässer mit absurder Länge und verschwindendem Radius. Die folgende Aufgabe ist deshalb eher akademisch.





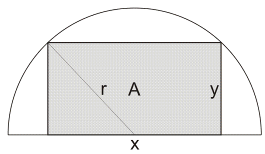
Fässer sind normalerweise bauchig, sollen hier aber als Zylinder mathematisch dargestellt werden, und das Spundloch sei exakt in der Mitte einer Mantellinie. Die Frage ist, wie gross das Volumen eines Fasses maximal sein kann, wenn die Grösse d fest gegeben ist. Der Parameter in dieser Aufgabe ist die Grösse d.

Das zu maximierende Volumen des Fasses ist $V = \pi \cdot r^2 \cdot l$. Nach dem Satz von Pythagoras gilt $d^2 = (\frac{l}{2})^2 + (2r)^2$, sodass man eine der beiden Unbekannten l und r eliminieren kann. Eliminiert man $r^2 = (\frac{d}{2})^2 - (\frac{l}{4})^2$ und setzt $x = l$, so wird $V(x) = \pi \cdot \left((\frac{d}{2})^2 - (\frac{x}{4})^2\right) \cdot x$. Weil V von d abhängt, schreiben wir nach Vereinfachungen $V_d(x) = \frac{\pi \cdot d^2}{4}x - \frac{\pi}{16}x^3$ definiert für $0 < x < 2d$.

Setzt man die Ableitung von $V_d(x)$ gleich 0, bekommt man $V_d'(x) = \frac{\pi \cdot d^2}{4} - \frac{3\pi}{16}x^2 = 0$ mit der positiven Lösung $x = l = \frac{2d}{\sqrt{3}}$ und $r = \frac{d}{\sqrt{6}}$. Für das Verhältnis gilt $l : r = 2\sqrt{2}$, sodass das Volumen des Fasses für gegebenes d bei diesem Verhältnis am grössten ist.

Wenn eine Funktion mit Wurzeln maximiert oder minimiert werden soll, erschwert das die Berechnung. Glücklicherweise gilt aber, dass jede Extremstelle von $x \mapsto f(x)$ auch Extremstelle von $x \mapsto (f(x))^2$ ist. Ist also $f(X)$ eine Wurzelfunktion, kann man stattdessen die wurzelfreie Funktion $f(x)^2$ untersuchen.

Beispiel:
Gesucht ist die maximale Rechtecksfläche $A = x \cdot y$, die man einem Halbkreis mit Radius r einschreiben kann. Für die Rechnung sei $r = 2$ angenommen. Mit $\frac{x^2}{4} + y^2 = r^2 = 4$ kann man y eliminieren und bekommt $A(x) = x \cdot \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$. Statt $A(x)$ zu maximieren, bestimmen wir die stationären Punkte von $B(x) = (A(x))^2 = x^2(4 - \frac{x^2}{4})$ und bekommen $B'(x) = x(8 - x^2)$ mit den drei Lösungen $x = 0$ und $x = \pm 2\sqrt{2}$, von denen nur $x = 2\sqrt{2}$ im Definitionsbereich $0 < x < 2r$ liegt. Es folgt $y = \sqrt{2}$ und $A = 4$.



4.2 Funktionsscharen

Manchmal möchte man nicht eine einzelne Funktion, sondern eine Menge von Funktionen, deren Elemente durch einen Parameter unterschieden werden, gemeinsam mit mathematischen Mitteln untersuchen. Ist die Grösse a der Parameter, so schreibt man für die einzelne Funktion $f_a(x)$ und nennt die Menge aller durch a parametrisierten Funktionen eine Funktionsschar.

Beispiel:
Im Punkt $(0, 0)$ stehe eine Wurfmaschine, die das Ziel im Punkt $(10, 2)$ treffen soll. Je nach Abwurfwinkel gibt es eine Flugbahn $y = ax^2 + bx + c$, die durch die beiden Punkte $(0, 0)$ und $(10, 2)$ geht. Der Parameter a muss negativ sein, und die beiden Parameter b und c lassen sich eliminieren. Weil die Flugbahn durch $(0, 0)$ gehen muss, ist $c = 0$, und weil die Flugbahn durch $(10, 2)$ geht, ist $b = 0.2 - 10a$. Die Flugbahn für ein gegebenes $a < 0$ ist also der Graph der Funktion $f_a(x) = ax^2 + (0.2 - 10a)x$. Eine Funktionsschar als parametrisierte Menge von Funktionen lässt sich als Ganzes analysieren. Die Ableitung etwa ist $f_a'(x) = 2ax + (0.2 - 10a)$, und der Scheitel der Flugbahn liegt beim x-Wert $x = 5 - \frac{1}{10a}$.

4.3 Differenzialgleichungen

In der algebraischen Gleichung $3x^2 - 7x + 5 = 0$ wird eine reelle Zahl gesucht, welche diese Gleichung erfüllt. Um sie zu erfüllen, muss dieselbe Zahl für das x im quadratischen und für das x im linearen Term eingesetzt werden. In einer *Differenzialgleichung* oder einem *Differenzialgleichungssystem* wird nicht eine Zahl, sondern eine Funktion gesucht, wobei Beziehungen zwischen der Funktion und einigen ihrer Ableitungen gegeben sind.

Beispiel:
Eine einfache Differenzialgleichung ist $f(x) = f'(x)$. Sie verlangt, dass eine Funktion gleich ihrer Ableitung ist. Diese Beziehung lässt sich beispielsweise durch $f(x) = e^x$ erfüllen, weil nach (6) die Ableitung von e^x auch wieder e^x ist.

In der Physik kommen Differenzialgleichungen häufig vor. Ist $s(t)$ der Ort eines Massenpunktes zur Zeit t, so ist die Geschwindigkeit $v(t)$ die Ableitung von $s(t)$ nach t und Beschleunigung $a(t)$ die Ableitung von $v(t)$ beziehungsweise die zweite Ableitung von $s(t)$ nach t. Ist die wirkende Kraft F abhängig vom Ort, so führt das wegen Kraft gleich Masse mal Beschleunigung zu einer Differenzialgleichung.

Beispiel:
Dieser Zusammenhang soll am *Hooke'schen Gesetz* verdeutlicht werden. Nach diesem Gesetz ist die Kraft proportional zur Auslenkung $s(t)$, und es gilt somit für die Federkraft $F = -D \cdot s(t)$ mit der Federkonstanten D. Wegen $F = m \cdot a(t)$ und $a(t) = v'(t) = s''(t)$ heisst das $F = -D \cdot s(t) = m \cdot s''(t)$. Diese Gleichung behauptet einen Zusammenhang zwischen der Funktion $s(t)$ und deren zweiter Ableitung. Löst man diese Differenzialgleichung, bekommt man die Bewegungsgleichung für den Massenpunkt in dieser Situation. Für die Differenzialgleichung schreiben wir $s''(t) = -k \cdot s(t)$ mit $k = \frac{D}{m}$.
Nach (4) und (5) sind die Sinus- und Cosinusfunktion geeignete Kandidaten zur Lösung dieser Differenzialgleichung. Mit dem Ansatz $s(t) = A \cdot \sin(a \cdot t) + B \cdot \cos(b \cdot t)$ ist $s''(t) = -A \cdot a^2 \cdot \sin(a \cdot t) - B \cdot b^2 \cdot \cos(b \cdot t)$. Um die Gleichung $s''(t) = -k \cdot s(t)$ zu erfüllen, muss $a^2 = b^2 = k$ oder $a = b = \sqrt{k}$ gelten. Deshalb schreibt man lieber $s''(t) = -\omega^2 \cdot s(t)$ mit $a = b = \omega$. Die Funktion $s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t)$ mit $\omega^2 = \frac{D}{m}$ ist also eine Lösung der aus dem Hooke'schen Gesetz abgeleiteten Differenzialgleichung.