Differenzial- und Integralrechnung II

Rainer Hauser

Dezember 2011

1 Einleitung

1.1 Ableitung

Die Ableitung einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ ist definiert als

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

und ist wieder eine Funktion. Ist f eine Polynomfunktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, so ist f' ebenfalls eine Polynomfunktion, wobei der Grad von f' um 1 kleiner ist als der Grad von f. Ist f eine gerade Polynomfunktion, also eine Funktion, bei der $f(-x) = f(x)$ für alle x gilt, so ist f' eine ungerade Funktion, also eine Funktion, bei der $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt. Ist f eine ungerade Funktion, so ist f' eine gerade Funktion.

Die Ableitung spielt in der Physik eine wichtige Rolle. Gibt $s(t)$ den Ort eines Massenpunktes zur Zeit t an, so ist $v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s(t)$ die Geschwindigkeit und $a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t)$ die Beschleunigung des Massenpunktes.

1.2 Skizzieren von Graphen

Kennt man die Nullstellen einer Funktion und die Nullstellen der Ableitung, kann man den Graphen einer Funktion im Bereich dieser x-Werte schon einigermassen skizzieren. Kennt man noch die Steigung des Graphen bei den Nullstellen und ein paar weitere Punkte auf dem Graphen, so lässt sich der Graph offensichtlich noch genauer zeichnen. Weil Polynomfunktionen f für sehr grosse Werte $|x|$ beliebig grosse Werte $|f(x)|$ annehmen und somit immer gegen $\pm\infty$ gehen, und weil eine Polynomfunktion n-ten Grades höchstens n Nullstellen und deren Ableitung höchstens $n-1$ Nullstellen hat, gibt es einen beschränkten Bereich von x- und y-Werten, in dem sich eine Polynomfunktion interessant verhält.

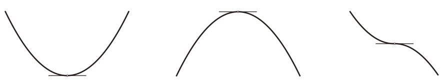
2 Polynomfunktionen und ihre Ableitungen

2.1 Höhere Ableitungen

Weil die Ableitung einer Polynomfunktion wieder eine Polynomfunktion ist, kann man auch die Ableitung einer Polynomfunktion ableiten. Das gilt nicht nur für Polynomfunktionen. Ist f eine differenzierbare Funktion, so ist f' die erste Ableitung. Ist f' auch differenzierbar, so ist f'' die zweite Ableitung, f''' die dritte Ableitung und so weiter. Ab der vierten Ableitung schreibt man normalerweise $f^{(4)}$.

2.2 Stationäre Punkte

Weil der Wert $f'(x_0)$ geometrisch die Steigung des Graphen von f im Punkt mit der x-Koordinate x_0 bedeutet, kann man durch das Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$ die Punkte finden, bei denen der Graph von f die Steigung null hat und die Tangente somit parallel zur x-Achse verläuft. Diese Punkte nennt man *stationäre Punkte*. Es gibt drei verschiedene Typen von stationären Punkten:



In der nebenstehenden Abbildung ist links ein *Minimum*, in der Mitte ein *Maximum* und rechts ein *Terrassenpunkt* jeweils mit einem Stück der Tangente gezeigt. Die Bedingungen für einen dieser Typen von stationären Punkten lassen sich nicht einfach formulieren. Die Bedingung $f(x_0) = 0$ ist zwar eine notwendige Bedingung für alle drei Typen, und $f''(x_0) > 0$ beziehungsweise $f''(x_0) < 0$ sind hinreichende Bedingungen dafür, dass sich dort ein Minimum beziehungsweise Maximum befindet, aber die Funktion $f(x) = x^4$ hat im Ursprung offensichtlich ein Minimum, obwohl $f''(0) = 0$ gilt, woraus folgt, dass die Bedingung $f''(x_0) \neq 0$ zwar eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für ein Extremum ist.

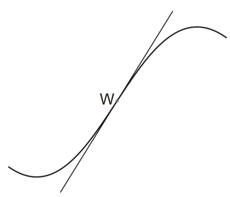
2.3 Relative und absolute Extrema

Unter einer *Umgebung* einer Zahl r versteht man ein offenes Intervall $]a, b[$, das x enthält. Eine Umgebung von r kann noch so klein gewählt werden, es gibt immer Zahlen darin, die kleiner als r sind, und Zahlen, die grösser als r sind.

Ein Punkt auf dem Graphen kann ein *absolutes* Maximum sein, wenn die Funktion im ganzen Definitionsbereich keinen grösseren Wert annimmt. So hat die Cosinusfunktion beispielsweise bei $x = 0$ (und bei sämtlichen Vielfachen von 2π) ein absolutes Maximum. Ein Punkt auf dem Graphen kann aber auch ein *relatives* Maximum sein, wenn die Funktion in einer Umgebung der x-Koordinate dieses Punktes keinen grösseren Wert annimmt. So hat $f(x) = x^3 - 3x^2$ im Punkt $(0, 0)$ zwar ein relatives Maximum, aber für grosse x nimmt f beliebig grosse Werte an, sodass $f(0) = 0$ nicht der grösste Wert im ganzen Definitionsbereich ist. Schränkt man den Definitionsbereich dieser Funktion auf das Intervall $[-3, 3]$ ein, so hat die Funktion ein absolutes Maximum bei $x = 0$ und bei $x = 3$, weil $f(0) = f(3) = 0$ und $f(x) < 0$ für alle anderen $x \in [-3, 3]$ gilt. Analog gibt es absolute und relative Minima.

2.4 Wendepunkte

Der Graph einer Funktion f heisst *linksgekrümmt* im Intervall $]a, b[$, wenn f' dort monoton wächst, und *rechtsgekrümmt*, wenn f' dort monoton fällt. Wechselt der Graph im Punkt W wie in der nebenstehenden Abbildung von einer Rechtskrümmung zu einer Linkskrümmung oder umgekehrt, so ist W ein so genannter *Wendepunkt*. Ist der Punkt mit der x-Koordinate x_0 ein Wendepunkt, so hat f' bei x_0 ein relatives Extremum. Weil jede quadratische Funktion beim Scheitel entweder ein Maximum oder ein Minimum hat, und weil die Ableitung einer kubischen Funktion eine quadratische Funktion ist, hat jede kubische Funktion genau einen Wendepunkt an der Stelle, an der die Ableitung den Scheitel hat.



2.5 Diskussion einer Polynomfunktion

Ist eine Polynomfunktion f gegeben und möchte man möglichst viel über sie erfahren, so ist einerseits der Monotoniesatz und andererseits das im Folgenden besprochene systematische Vorgehen nützlich. Ziel ist es dabei, den Graphen der Funktion in einem geeigneten Intervall möglichst genau zu skizzieren.

Der *Monotoniesatz* besagt, dass eine Funktion f, deren Definitionsbereich das Intervall $]a, b[$ enthält, in diesem ganzen Intervall streng monoton wachsend beziehungsweise fallend ist, wenn $f'(x) > 0$ beziehungsweise $f'(x) < 0$ ist. Der Monotoniesatz gilt nicht nur für Polynomfunktionen, sondern allgemein für differenzierbare Funktionen.

Vorgehen bei der Diskussion einer Polynomfunktion:

1. Verhalten von f für grosse $|x|$:
   Die Funktionswerte $f(-x)$ und $f(x)$ für grosse Zahlen x werden bei Polynomfunktionen vom Summanden mit dem grössten Exponenten dominiert. Geht man also auf der x-Achse sehr weit nach

links oder rechts, gehen die Funktionswerte also entweder gegen $-\infty$ oder gegen $+\infty$. Ist der Summand mit dem grössten Exponenten $a_n x^n$, so hängt das Verhalten für grosse $|x|$ nur von a_n und n ab. Ist n ungerade, so kommt für $a_n > 0$ der Graph links von $-\infty$, schneidet die x-Achse mindestens einmal, hat also mindestens eine Nullstelle und geht nach rechts zu $+\infty$, während er für $a_n < 0$ links von $+\infty$ kommt und nach $-\infty$ geht. Ist n gerade, so gehen die Funktionswerte für grosse $|x|$ gegen $+\infty$ bei $a_n > 0$ und gegen $-\infty$ bei $a_n < 0$.

2. Symmetrieeigenschaften:
   Kommen in einer Polynomfunktion f nur Summanden $a_i x^i$ mit geraden Werten von i vor, wobei das absolute Glied als $a_0 x^0 = a_0$ dazu gezählt wird, so ist die Funktion gerade, weil $f(-x) = f(x)$ gilt. Die Graphen von geraden Funktionen sind symmetrisch bezüglich Spiegelung an der y-Achse. Kommen in f nur Summanden $a_i x^i$ mit ungeraden Werten von i vor, wobei das lineare Glied als $a_1 x^1 = a_1 x$ dazugehört, so ist die Funktion ungerade, weil $f(-x) = -f(x)$ gilt. Die Graphen von ungeraden Funktionen sind symmetrisch bezüglich Drehung um 180° um den Ursprung. Bei geraden und ungeraden Funktionen genügt es, nur das Verhalten für $x \geq 0$ oder $x \leq 0$ zu untersuchen.

3. Nullstellen von f:
   Die Nullstellen einer Funktion f sind diejenigen x-Werte, für die $f(x) = 0$ gilt. Sie geben an, wo der Graph von f die x-Achse schneidet. Polynomfunktionen n-ten Grades haben nicht immer Nullstellen. Ist n ungerade, gibt es aber wie oben erwähnt immer mindestens eine Nullstelle.

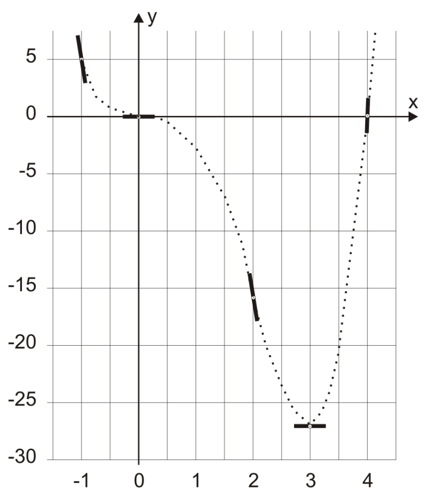
4. Extremstellen und Extrempunkte von f:
   Die Maxima und Minima gehören zu denjenigen Punkten, die unbedingt im skizzierten Graphen einer Funktion f eingezeichnet werden müssen. Zuerst bestimmt man die stationären Punkte und schaut diejenigen von ihnen, die sich nicht eindeutig als Extremstelle einordnen lassen, später noch genauer an. Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, so liegt dort ein Extremum vor.

5. Wendestellen und Wendepunkte von f:
   Weil Terrassenpunkte auch Wendepunkte sind, kann man mit den höheren Ableitungen auch die stationären Punkte besser kategorisieren. Gilt für eine Wendestelle x_0, die somit $f''(x_0) = 0$ erfüllen muss, zusätzlich noch $f'''(x_0) \neq 0$, so liegt dort ein Wendepunkt vor. Gilt dort jedoch $f'''(x_0) = 0$, so bestimmt man am einfachsten zwei Funktionswerte wenig links und wenig rechts von x_0.

6. Graph skizzieren:
   Trägt man sämtliche Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen x_i mit zugehörigen Werten von $f(x_i)$ und $f'(x_i)$ in eine Tabelle ein, kann man damit den Graphen schon recht gut skizzieren. Manchmal lohnt es sich noch weitere Punkte in diese Tabelle einzutragen.

Beispiel:
Zur Illustration soll die Funktion $f(x) = x^4 - 4x^3$ diskutiert und deren Graph skizziert werden. Für grosse Wert $|x|$ ist $f(x) > 0$, und der Graph kommt somit links von oben und geht rechts nach oben. Weil gerade und ungerade Exponenten vorkommen, gibt es keine Symmetrieeigenschaften.
Die Funktion hat bei $x = 0$ eine dreifache und bei $x = 4$ eine einfache Nullstelle. Aus $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ und $f'(x) = 0$ folgt, dass es zwei stationäre Punkte mit den x-Koordinaten $x = 0$ und $x = 3$ gibt. Aus $f''(x) = 12x^2 - 24x$ folgt einerseits wegen $f''(0) = 0$, dass man den Punkt $(0, 0)$ genauer untersuchen muss, wegen $f''(3) = 36 > 0$, dass bei $x = 3$ ein Minimum vorliegt, und wegen $f''(0) = 0$ und $f''(2) = 0$, dass bei $x = 0$ und $x = 2$ Wendestellen liegen können. Aus $f'''(x) = 24x - 24$, $f'''(0) = -24 < 0$ und $f'''(2) = 24 > 0$ folgt, dass dort auch wirklich Wendestellen liegen. Der Punkt $(0, 0)$ ist somit kein Extremum, sondern ein Terrassenpunkt.
Weil keine dieser Stellen links von $x = 0$ liegt, $x = 0$ jedoch als mehrfache Nullstelle besonders ist, nehmen wir noch $x = -1$ hinzu. Daraus folgt der nebenstehende Graph, bei dem die Skalen in x- und y-Richtung verschieden gewählt wurden.

x	-1	0	2	3	4
$f(x)$	5	0	-16	-27	0
$f'(x)$	-16	0	-16	0	64



3 Tangenten, Normalen und sich schneidende Kurven

3.1 Tangenten und Normalen an eine Kurve

Alle Geraden ausser denjenigen parallel zur y-Achse lassen sich für geeignete Werte von a und b durch die Geradengleichung $y = ax + b$ beziehungsweise die Menge $\{(x, y) \mid y = ax + b\}$ festlegen. Das gilt auch für Tangenten an den Graphen einer Funktion f, weil diese nie parallel zur y-Achse sein können.

Ist eine Funktion f und ein Punkt $P(x_0, y_0)$ auf dem Graphen gegeben, so kann die Geradengleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P berechnet werden. Weil die Tangente im Punkt P die Steigung $f'(x_0)$ haben muss, ist $a = f'(x_0)$. Weil zudem der Punkt P auf der Tangente liegen muss, lässt sich durch $y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + b$ auch b bestimmen.

Die Normale ist eine Gerade, die in einem vorgegebenen Punkt P auf dem Graphen einer Funktion f senkrecht zur Tangente in diesem Punkt steht. Weil zwei Geraden $y = a_1x+b_1$ und $y = a_2x+b_2$ genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn $a_1 \cdot a_2 = -1$ gilt, lässt sich auf analoge Weise die Geradengleichung einer Normalen finden.

Beispiel:
Ist die Funktion $f(x) = x^2$ gegeben und die Tangente durch den Punkt mit der x-Koordinate $x_0 = 3$ gesucht, so ist $y_0 = f(x_0) = f(3) = 9$ und $a = f'(x_0) = 2x_0 = 6$. Somit folgt $b = -9$ aus $9 = 18 + b$ wegen $y_0 = 9 = ax_0 + b = 6 \cdot 3 + b$.
Ist die Normale durch den gleichen Punkt gesucht, so lässt sie sich ebenfalls durch den Ansatz $y = ax + b$ (jetzt aber mit anderen Werten a und b) bestimmen, denn es gilt $a = -\frac{1}{6}$ wegen $a \cdot 6 = -1$, und $b = \frac{19}{2}$ wegen $y_0 = 9 = ax_0 + b = -\frac{1}{6} \cdot 3 + b = b - \frac{1}{2}$.

Im Gegensatz zu Tangenten können Normalen parallel zur y-Achse zu liegen kommen, können also nicht immer durch $y = ax + b$ dargestellt werden. Die Tangenten in einem stationären Punkt haben die Form $y = 0 \cdot x + b$ oder einfacher $y = b$. (In der Analytischen Geometrie stellt man aus diesem Grund die Geraden allgemeiner durch die Gleichung $ax + by + c = 0$ dar. In dieser Form können alle Geraden in der Ebene dargestellt werden. Ist $a \neq 0$ und $b = 0$, so ist die Gerade parallel zur y-Achse.)

Ist eine Funktion f und ein Punkt $P(x_0, y_0)$ ausserhalb des Graphen gegeben, so ist es auch möglich, die Tangenten an den Graphen von f zu finden, die durch den Punkt P gehen. Dazu nimmt man an, der Punkt auf dem Graphen, durch den die Tangente geht, habe die Koordinaten $(u, f(u))$ und bestimmt die Steigung a der Tangente $y = ax + b$ aus

$$a = f'(u) = \frac{f(u) - y_0}{u - x_0}$$

durch Gleichsetzen des Differenzen- und des Differenzialquotienten in diesem Punkt.

Beispiel:
Ist $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ und der Punkt $P(-1, -2)$ ausserhalb des Graphen von f gegeben, so gilt

$$a = \frac{1}{2}u = \frac{\frac{1}{4}u^2 + 2}{u + 1}$$

für die Steigung a der Tangente $y = ax + b$ im gesuchten Punkt $Q(u, f(u))$ auf dem Graphen. Daraus folgt $2u^2 + 2u = u^2 + 8$ und weiter die quadratische Gleichung $u^2 + 2u - 8 = 0$ mit den zwei Lösungen $u_1 = -4$ und $u_2 = 2$. Der Rest der Aufgabe lässt sich wie oben beschrieben lösen, weil man jetzt einen Punkt kennt, der auf dem Graphen von f und auf der Tangente liegt. Es gibt für die gegebene Funktion f und den gegebenen Punkt P zwei Lösungen, denn sowohl die Gerade durch $P(-1, -2)$ und $Q_1(-4, 4)$ wie auch die Gerade durch $P(-1, -2)$ und $Q_2(2, 1)$ ist eine Tangente an den Graphen von f. Die beiden Tangenten haben die Geradengleichungen $y = -2x - 4$ und $y = x - 1$.

3.2 Schnittpunkte und Schnittwinkel zweier Graphen

Sind zwei Funktionen f und g gegeben, so findet man die x-Koordinaten der Schnittpunkte ihrer Graphen durch Lösen der Gleichung $f(x) = g(x)$, denn ein Punkt $P(x_0, y_0)$ ist genau dann Schnittpunkt der beiden

Graphen, wenn die Funktionswerte an der Stelle x_0 gleich sind. Der Schnittwinkel der Graphen von zwei Funktionen f und g in einem Schnittpunkt S ist der Winkel, den die Tangenten in S miteinander bilden. Will man also den Schnittwinkel finden, bestimmt man erst die Koordinaten des gesuchten Schnittpunkts S sowie die Geradengleichungen der Tangente in S an f und der Tangente in S an g.

Der Winkel zwischen zwei Geraden $y = a_1x + b_1$ und $y = a_2x + b_2$ kann man entweder mit den Mitteln der Vektorrechnung bestimmen, oder man bestimmt die Winkel zwischen den Geraden und der x-Achse und berechnet daraus den gesuchten Winkel. Der zweite Weg wird hier genauer beschrieben. Die Steigung a einer Geraden bedeutet, dass man von einem Punkt auf der Geraden erst um 1 nach rechts und anschliessend um a nach oben, falls a positiv ist, oder um a nach unten, falls a negativ ist, gehen muss, um wieder zu einem Punkt auf der Geraden zu kommen. Das heisst aber, dass für den Winkel α zwischen der x-Achse und der Geraden $\tan\alpha = a$ gilt, womit man α berechnen kann.

Beispiel:
Die Schnittpunkte von $f(x) = -x^2$ und $g(x) = x^2 - x - 6$ findet man durch durch Lösen der Gleichung $-x^2 = x^2 - x - 6$, was zu den Lösungen $x_1 = -\frac{3}{2}$ und $x_2 = 2$ führt. Die beiden Schnittpunkte haben also die Koordinaten $(-1.5, -2.25)$ und $(2, -4)$.
Will man den Winkel α zwischen den Graphen von f und g im Punkt $P(2, -4)$ bestimmen, muss man erst die beiden Geradengleichungen für die Tangenten finden. Nach obigem Algorithmus gibt das $y = -4x + 4$ und $y = 3x - 10$. (Für die Bestimmung des Winkels hätte es genügt, die beiden Steigungen zu berechnen.) Der Winkel zwischen der x-Achse und $y = -4x + 4$ gemessen im Uhrzeigersinn ist $76.0°$, und der Winkel zwischen der x-Achse und $y = 3x - 10$ gemessen im Gegenuhrzeigersinn ist $71.6°$. Die beiden Graphen schneiden sich also in einem Winkel von $76.0° + 71.6° = 147.6°$ beziehungsweise $180° - 147.6° = 32.4°$.

Den Winkel γ zwischen den zwei Geraden mit den Steigungen a_1 und a_2 kann man auch mit dem Additionstheorem

$$\tan\gamma = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2}\right|$$

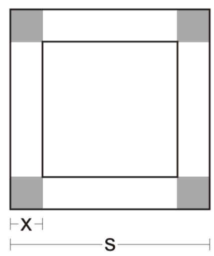
berechnen, ohne dass man sich Gedanken machen muss, ob die Winkel im Uhrzeiger- oder Gegenuhrzeigersinn bestimmt worden sind. Es gilt aber immer, dass es zwischen zwei Geraden zwei Winkel zwischen $0°$ und $180°$ gibt, die im rechtwinkligen Fall zusammenfallen.

4 Anwendungen der Differenzialrechnung

4.1 Maximierung und Minimierung

Soll eine gewisse Grösse maximiert oder minimiert werden, kann die Differenzialrechnung eingesetzt werden, um das Maximum oder Minimum zu finden. Zur Illustration soll das folgende Beispiel genügen.

Beispiel:
Aus einem quadratischen Stück Blech mit Seitenlänge $s = 10\,\text{cm}$ sollen wie in der nebenstehenden Abbildung grau markiert so vier kleine Quadrate entfernt werden, dass aus dem übrig bleibenden Stück Blech eine oben offene Schachtel mit maximalem Volumen geformt werden kann.



Das Volumen der Schachtel in Abhängigkeit von x ist $V(x) = x(s - 2x)^2$. Gesucht ist also das Maximum von $V(x)$ im Bereich $0 \leq x \leq \frac{1}{2}s$. Ausmultiplizieren ergibt mit $s = 10$ die Polynomfunktion $V(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$. Setzt man die Ableitung $V'(x) = 12x^2 - 80x + 100$ gleich null, bekommt man die stationären Punkte. Die Gleichung $12x^2 - 80x + 100 = 0$ oder vereinfacht $3x^2 - 20x + 25 = 0$ hat die sinnvolle Lösung $x = \frac{5}{3}$ und die nicht sinnvolle Lösung $x = 5$, wie man mit der zweiten Ableitung $V''(x) = 24x - 80$ sieht. Die Stelle $x = 5$ ist ein Minimum und die Stelle $x = \frac{5}{3}$ ein Maximum, für die $V(\frac{5}{3}) = \frac{2000}{27} \approx 74$ gilt. Das maximale Volumen der Schachtel ist somit etwa $74\,\text{cm}^3$.

4.2 Allgemeine Interpolation

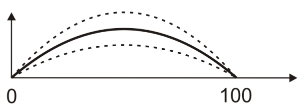
Eine allgemeine Aufgabenstellung ist die, dass eine Polynomfunktion n-ten Grades gesucht ist, die gewisse Bedingungen erfüllt. Die Bedingungen können Punkte sein, die auf dem Graphen der gesuchten Funktion liegen, Steigungen an gewissen Stellen oder aber Bedingungen an Maxima, Minima oder Wendepunkte. Auf diese Weise kann man andere Funktionen wie beispielsweise die Sinusfunktion im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ approximieren, wie unten gezeigt wird.

Beispiel:
Gesucht ist die quadratische Funktion f, die durch den Punkt $A(4,3)$ geht und den Scheitel bei $S(2,1)$ hat. Die Problemstellung verlangt als Lösung also eine Polynomfunktion zweiten Grades, deren Graph die Bedingungen erfüllt, dass die Punkte mit den Koordinaten $(4,3)$ und $(2,1)$ darauf liegen, und dass die Funktion bei $x = 2$ ein Minimum oder Maximum hat.
Macht man den Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ und setzt die ersten beiden Bedingungen darin ein, so bekommt man die zwei Gleichungen $3 = 16a + 4b + c$ und $1 = 4a + 2b + c$. Aus der dritten Bedingung, dass die Steigung bei $x = 2$ verschwindet, folgt $0 = 4a + b$. Mit diesen drei Gleichungen kann man die drei Unbekannten a, b, c bestimmen. Die gesuchte Funktion ist $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

Eine Polynomfunktion n-ten Grades kann maximal n Nullstellen haben. Ist n ungerade, gibt es mindestens eine Nullstelle, weil der Graph die x-Achse mindestens einmal schneiden muss, während der Graph für gerade n vollständig oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen kann. Eine Nullstelle kann einfach oder mehrfach sein. Die Funktion $f(x) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 2x^3$ beispielsweise hat die einfache Nullstelle $x = 2$, die doppelte Nullstelle $x = 1$ und die dreifache Nullstelle $x = 0$, weil sie in faktorisierter Form als $f(x) = x^3(x-1)^2(x-2)$ geschrieben werden kann.

Eine Polynomfunktion n-ten Grades kann also weniger als n Nullstellen haben. Besitzt sie jedoch genau die n Nullstellen x_1, x_2, ..., x_n, so kann sie auf folgende Weise in ein Produkt umgeformt, das heisst faktorisiert werden. Es gilt $f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$ für eine Zahl $a_n \neq 0$. Die Nullstellen x_i müssen nicht paarweise verschieden sein. Sind m dieser Werte gleich, so bilden sie eine m-fache Nullstelle. Weil $f(x) = 2x^6 - 8x^5 + 10x^4 - 4x^3$ die sechs Nullstellen 0 (dreifach), 1 (doppelt) und 2 (einfach) hat, kann sie als $f(x) = 2x^3(x-1)^2(x-2)$ in faktorisierter Form dargestellt werden.

Ist also eine Polynomfunktion n-ten Grades mit den n Nullstellen x_1, ..., x_n gesucht, so kann man den Ansatz $f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$ machen. Weil es für jede Zahl $a_n \neq 0$ so eine Funktion gibt, braucht es noch eine weitere Bedingung, um die Funktion eindeutig festzulegen. Das kann zum Beispiel ein Punkt auf dem Graphen, der nicht auf der x-Achse liegt, oder die Steigung des Graphen in einem Punkt sein.



Beispiel:
Gesucht ist eine Polynomfunktion f für die Flugbahn eines Golfballs. Der Abschlag ist beim Punkt 0, und das Loch ist beim hundert Meter entfernten Punkt 100. Die Flugbahn ist gemäss Physik eine Parabel und kann somit durch den Graphen einer quadratischen Funktion dargestellt werden. Weil die gesuchte Parabel bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 100$ eine Nullstelle hat und quadratische Funktionen maximal zwei Nullstellen haben können, kann man den Ansatz $f(x) = a(x-0)(x-100)$ machen, wofür man $f(x) = ax(x-100)$ oder ausmultipliziert $f(x) = ax^2 - 100ax$ schreiben darf. Die Funktion ist durch die Nullstellen nicht eindeutig bestimmt, wie die drei möglichen Flugbahnen in der nebenstehenden Abbildung zeigen. Gibt man aber beispielsweise weiter vor, dass der Golfball mit einem Winkel von 45° abgeschlagen werden muss, so kann man mit der Steigung $f'(0) = 1$ den Parameter a bestimmen, denn aus $f'(0) = 1 = -100a$ folgt $a = -0.01$.

Mit Polynomfunktionen können andere Funktionen in einem vorgegebenen Bereich angenähert werden. Zur Illustration soll die Funktion $\sin(x)$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ durch eine Polynomfunktion höchstens vierten Grades möglichst gut approximiert werden. Weil die Sinusfunktion ungerade ist, muss auch f ungerade sein. Sie ist also dritten Grades und hat die Form $f(x) = ax^3 + cx$ mit $a < 0$. Weil $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ ist, hat man die Gleichungen $\frac{\pi^3}{8}a + \frac{\pi}{2}c = 1$ und $3\frac{\pi^2}{4}a + c = 0$ für a und c. Mit $a = -\frac{4}{\pi^3}$ und $c = \frac{3}{\pi}$ folgt $f(x) = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{3}{\pi}x$. Die gefundene kubische Polynomfunktion hat ihr Minimum bei $-\frac{\pi}{2}$ und ihr Maximum bei $\frac{\pi}{2}$ sowie den Wendepunkt im Punkt $(0,0)$, wie man leicht nachrechnet. In Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ verhält sie sich also wie die Sinusfunktion, ausserhalb davon aber offensichtlich nicht, denn die Sinusfunktion ist periodisch und ihre Funktionswerte liegen zwischen -1 und 1, während die kubische Polynomfunktion aperiodisch und unbeschränkt ist.