Differenzial- und Integralrechnung I

Rainer Hauser

April 2011

1 Einleitung

1.1 Polynome

Die *Polynome* bilden eine wichtige Familie von reellen Funktionen. Sie lassen sich durch die endliche Anzahl von $n + 1$ Parametern $a_i \in \mathbb{R}$ in der Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ darstellen. Ihre einfachste Unterfamilie besteht aus den konstanten Funktionen $f(x) = a_0$. Die nächste Unterfamilie enthält die linearen Funktionen, die durch $f(x) = a_1 x + a_0$ festgelegt sind. Die quadratischen Funktionen $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, die kubischen Funktionen $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ und so weiter sind ebenfalls Unterfamilien.

Polynome, für die das Glied $a_n x^n$ mit dem grössten Exponenten n nicht verschwindet, für die also $a_n \neq 0$ gilt, haben maximal n Nullstellen. Ist die Zahl n ungerade, so hat das Polynom mindestens eine Nullstelle, weil der Graph die x-Achse eine ungerade Anzahl mal schneiden muss.

1.2 Mittlere Geschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit

Kann sich ein Teilchen auf einer Geraden hin- und herbewegen, und befindet es sich zur Zeit t_1 am Ort s_1 und zur Zeit t_2 am Ort s_2, so kennt man die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$. Über die Momentangeschwindigkeit lässt sich mit diesen zwei Messwerten allein nur wenig sagen.

Kennt man hingegen die Bewegungsgleichung eines Teilchens, die für jeden Zeitpunkt t den Ort $s(t)$ angibt, an dem sich das Teilchen befindet, so müsste man eigentlich auch die Momentangeschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt t angeben können. Beim freien Fall beispielsweise ist $s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$. Weil die Beschleunigung g konstant ist, ist $v(t) = g \cdot t$.

2 Der Begriff der Ableitung

2.1 Sekanten und Tangenten

Die Tangente an einen Kreis ist dadurch definiert, dass sie den Kreis berührt und senkrecht auf der Geraden durch den Kreismittelpunkt und den Berührungspunkt steht. Diese Definition lässt sich nicht auf die Tangente an den Graphen einer Funktion erweitern. Beginnt man hingegen mit einer Sekante durch zwei Punkte des Graphen und lässt man den zweiten Punkt gegen den ersten wandern, so lässt sich der Grenzwert, bei dem die beiden Punkte zusammenfallen, als *Tangente* definieren. Auf diese Weise lässt sich die Tangente für jeden Punkt auf dem Graphen gewisser Funktionen bestimmen. Die Steigung der Tangente kann dann als die Steigung des Graphen an diesem Punkt bezeichnet werden.

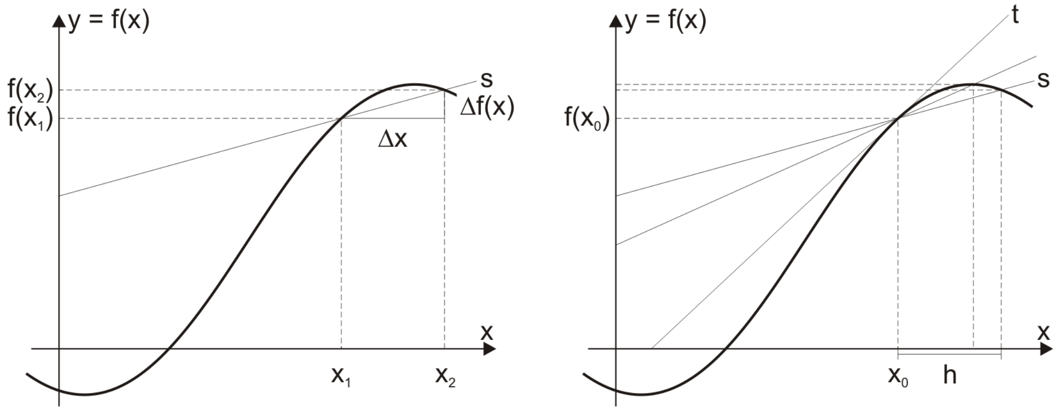
2.2 Diffenenzenquotienten und Differenzialquotienten

Diese geometrischen Betrachtungen lassen sich auch rein über die Funktionen und ihre Werte nachvollziehen. Durch zwei verschiedene Punkte auf dem Graphen mit den Koordinaten $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$

lässt sich eine Gerade legen, die der Sekante entspricht. Die Steigung dieser Sekante ist heisst *Differenzenquotient* und ist durch

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

definiert, wobei die zweite Version aus der ersten entsteht, wenn man $x_0 = x_1$ und $x_0 + h = x_2$ setzt. Die beiden Versionen sind in der unten stehenden Abbildung dargestellt.



Lässt man x_2 gegen x_1 beziehungsweise h gegen 0 gehen, so wird aus dem Differenzenquotient von (1) der *Differenzialquotient*, der durch

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2}$$

definiert ist. Der Differenzialquotient liefert also die Steigung des Graphen im Punkt x_0.

2.3 Die Ableitung

Der Differenzialquotient in (2) ist oben für den Punkt x_0 bestimmt worden. Weil dieser Punkt aber allgemein gewählt war, kann der Differenzialquotient für jeden Punkt x als

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

definiert werden. Das ist eine Funktion, die mit $f'(x)$ oder $\frac{df}{dx}$ bezeichnet wird und *Ableitung* von $f(x)$ heisst. Sie ordnet jedem Punkt x die Steigung des Graphen im Punkt $(x, f(x))$ zu.

Beispiel: $f(x) = x^2$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h} = 2x$$

3 Eigenschaften und Anwendungen der Ableitung

3.1 Die Ableitung von Polynomen

Satz: Für $f(x) = x^p$ mit $p \in \mathbb{R}$ ist $f'(x) = p \cdot x^{p-1}$.

Satz: Ist $f(x) = c \cdot g(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$, so ist $f'(x) = c \cdot g'(x)$.

Satz: Ist $f(x) = g(x) + h(x)$, so ist $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

Weil der erste Satz speziell für $p \in \mathbb{N}$ gilt, und weil jedes Polynom aus einer Summe von $a_i x^i$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ besteht, kann mit diesen drei Sätzen jedes Polynom abgeleitet werden.

Beispiel:
Ist $f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 3$, so ist $f'(x) = 3x^2 + 10x + 2$.

3.2 Anwendungen in der Physik

Die Ableitung gibt die Änderungsrate einer Funktion an der Stelle x an. Kann man die Bewegung eines Massenpunktes als Abhängigkeit des Ortes s von der Zeit t als $s(t)$ angeben, so ist $v(t) = s'(t)$ die Änderungsrate des Ortes und $a(t) = v'(t)$ die Änderungsrate der Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung lassen sich somit als Ableitung angeben. (In der Physik spielt die Ableitung als Änderungsrate auch bei anderen zeitabhängigen Grössen eine wichtige Rolle.)

Beispiel:
Die allgemeine Bewegungsgleichung für einen gleichmässig beschleunigten Massenpunkt, der sich zur Zeit $t = 0$ am Ort s_0 befindet und sich mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt, ist $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Durch die Ableitung findet man die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = v(t) = v_0 + at$. Durch nochmalige Ableitung findet man die Beschleunigung $\frac{dv}{dt} = a(t) = a$, die wie vorausgesetzt konstant ist. Der freie Fall ist ein Beispiel einer gleichmässig beschleunigten Bewegung mit der konstanten Beschleunigung $a(t) = g$.

3.3 Skizzieren eines Graphen

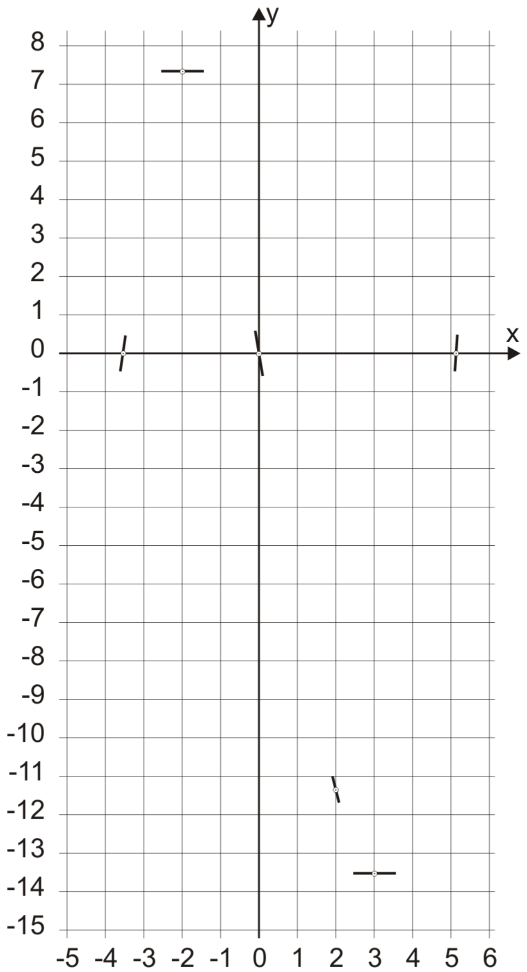
Den Graphen einer Funktion kann man skizzieren, wenn man einzelne Werte kennt. Von speziellem Interesse sind dabei Maxima, Minima und Nullstellen. Kennt man nicht nur Punkte im Koordinatensystem, durch die der Graph geht, sondern auch noch die Steigung, die der Graph dort annimmt, so lässt sich der Graph noch genauer aufzeichnen.

Beispiel:
Die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$ hat die Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 \approx -3.6$ und $x_3 \approx 5.1$. Die Ableitung von $f(x)$ ist $f'(x) = x^2 - x - 6$ und hat die Nullstellen $x_4 = -2$ und $x_5 = 3$. Nehmen wir noch weitere x-Werte dazu wie etwa $x_6 = 2$, so haben wir mit den Werten von $f(x)$ (also den y-Koordinaten der Punkte) und den Werten von $f'(x)$ (also den Steigungen in diesen Punkten) bereits recht viel Information, um den Graphen von $f(x)$ zu skizzieren:

x	-3.6	-2	0	2	3	5.1
$f(x)$	0	7.3	0	-11.3	-13.5	0
$f'(x)$	10.6	0	-6	-4	0	14.9

Bei der Wahl geeigneter Werte sind hier die Nullstellen der Funktion selber und ihrer Ableitung gewählt worden, weil die Nullstellen der Funktion Schnittpunkte mit der x-Achse darstellen, und Nullstellen der Ableitung Punkte des Graphen mit Steigung 0 bedeuten. Zusätzlich ist der Punkt für $x = 2$ mit der Steigung -11.3 gewählt worden, um einen weiteren Punkt des Graphen zu bekommen. Je mehr weitere Punkte gewählt werden, desto besser lässt sich der Graph allein durch Punkte des Graphen und deren Steigung skizzieren.

Der Ausschnitt des Koordinatensystems ist so gewählt worden, dass alle Nullstellen der Funktion selber und alle Nullstellen ihrer Ableitung zu sehen sind. Das sind die interessanten Stellen, denn für grosse Werte von $|x|$ dominiert das Glied $\frac{1}{3}x^3$, das links nach $-\infty$ und rechts nach $+\infty$ strebt.



Den Graphen in der obigen Abbildung erkennt man deutlich. Der Graph kommt steil von links unten in den gezeigten Ausschnitt des Koordinatensystems, schneidet die x-Achse bei -3.6, wendet im Punkt $(-2, 7.3)$, schneidet die x-Achse im Nullpunkt wieder, wendet im Punkt $(3, -13.5)$ nochmals, schneidet die x-Achse bei 5.1 zum dritten Mal und verlässt den Ausschnitt nach oben rechts.

4 Existenz der Ableitung

4.1 Differenzierbarkeit

Der Grenzwert in (2) muss nicht für jeden x-Wert einer Funktion existieren. Die Funktion, für die $f(x) = 2$ für alle $x \leq 0$ und $f(x) = 3$ für alle $x > 0$ ist, und deren Graph in der unten stehenden Abbildung links gezeigt ist, hat für $x = 0$ keinen endlichen Differenzialquotienten, denn

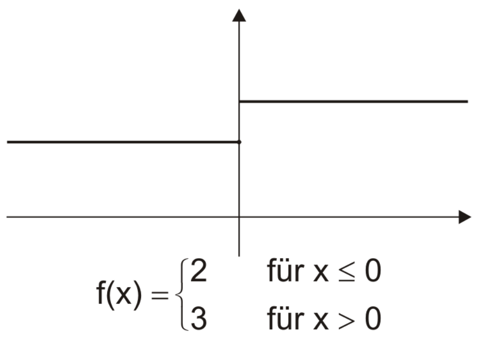
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3-2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}$$

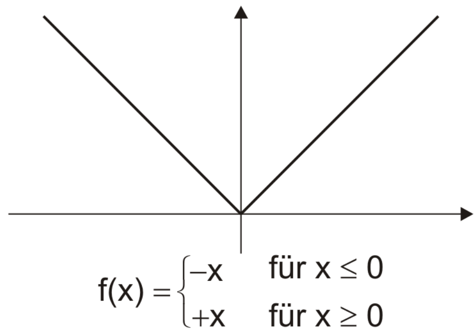
wird für h gegen 0 wegen der Grösse h im Nenner, die sich nicht wegkürzt, beliebig gross.

In (3) ist eine kleine Asymmetrie versteckt. Der Wert von $f(x+h)$ nähert sich dem Wert $f(x)$ von rechts, wenn man $h \geq 0$ voraussetzt. Man hätte mit gleichem Recht die Ableitung durch

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{4}$$

definieren können, der sich dem Wert $f(x)$ von links nähert. Für die Funktion $f(x) = |x|$, dessen Graph in der unten stehenden Abbildung rechts gezeigt ist, hat die Ableitung nach (3) an der Stelle $x = 0$ den Wert 1 und nach (4) den Wert -1. Anschaulich ist das auch verständlich, denn die Betragsfunktion hat im Nullpunkt keine eindeutig festlegbare Steigung.





Existiert die Ableitung von $f(x)$ für den Wert x für die beiden Definitionen (3) und (4), und sind die beiden Grenzwerte gleich, so nennt man die Funktion $f(x)$ an der Stelle x *differenzierbar*. Die Betragsfunktion ist somit an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

4.2 Stetigkeit

Es gibt Funktionen, für die kleine Änderungen des x-Wertes grosse Änderungen des y-Wertes bedeuten können. Das Porto ist für Briefe bis 100 g konstant, wird aber für nur unmerklich schwerere Briefe spürbar teuerer. Hat eine Funktion solche Sprungstellen, so spricht man von einer Unstetigkeit.

Eine Funktion $f(x)$ heisst *stetig* an der Stelle x, wenn

$$\lim_{h \to 0} \big(f(x+h) - f(x)\big) = \lim_{h \to 0} \big(f(x) - f(x-h)\big) = 0 \tag{5}$$

gilt, wenn sich also die Funktionswerte in der Umgebung von x nur wenig unterscheiden.

Satz: Ist eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x differenzierbar, so ist sie an der Stelle x auch stetig.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt jedoch nicht wie die Betragsfunktion zeigt.