Rechnen mit Brüchen

Rainer Hauser

September 2011

1 Verschiedene Arten von Brüchen

1.1 Dezimalbrüche

Stellt man die ganzen Zahlen im Dezimalsystem dar, indem man sie in Zehnerpotenzen als Einer, Zehner, Hunderter, Tausender und so weiter anordnet, so ist es naheliegend, auch die Bruchteile eines Ganzen in Zehnerpotenzen als Zehntel, Hundertstel, Tausendstel und so weiter anzugeben. Der Meter als Längenmass ist beispielsweise in Dezimeter, Zentimeter, Millimeter und noch kleinere Untereinheiten eingeteilt, die auf diesen Bruchteilen basieren. Hat man eine Länge von 5.736 Meter gemessen, so sind das 5 Meter, 7 Dezimeter, 3 Zentimeter und 6 Millimeter.

Dezimalbrüche sind nützlich einerseits bei Währungen, weil man den Euro, Dollar, Franken und so weiter in hundert Untereinheiten eingeteilt hat und es keine noch kleineren Untereinheiten gibt, und andererseits bei Näherungswerten, wenn es nicht um die exakte Zahl geht. Teilt man aber eine Einheit in drei gleiche Teile und will das Resultat als Dezimalbruch exakt darstellen, so bekommt man unendlich viele Stellen. Jede endliche Darstellung wie 0.3333333 ist nur eine Näherung, die zwar beliebig genau gemacht werden kann, aber trotzdem nie den exakten Wert erreicht.

Unendliche Dezimalbrüche sind nicht sehr übersichtlich, obwohl man Mittel gefunden hat, um sie mit endlich vielen Zeichen festzulegen. Ein Drittel beispielsweise lässt sich durch den unendlichen, periodischen Dezimalbruch $0.\overline{3}$ darstellen, und das Resultat jeder Division $m \div n$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ (ausser für $n = 0$) lässt sich entweder als endlicher, abbrechender oder als unendlicher, periodischer Dezimalbruch schreiben.

1.2 Gewöhnliche Brüche

Gebrochene Zahlen und somit Bruchteile von einem Ganzen lassen sich auch als so genannte gewöhnliche Brüche $\frac{m}{n}$ schreiben. Ein Bruch ist eigentlich eine Operation, denn $\frac{m}{n}$ ist eine Division und bedeutet anders notiert $m \div n$. Normalerweise kürzt man jedoch den Bruch und setzt ein allfälliges Vorzeichen vor den ganzen Bruch. Als Ergebnis der Division $(-15) \div 21$ zum Beispiel schreibt man $-\frac{5}{7}$.

Ein Bruch besteht aus einer Zahl über dem Bruchstrich, die man *Zähler* nennt, dem Bruchstrich und einer Zahl unter dem Bruchstrich, die man *Nenner* nennt. Ein negativer Bruch hat zudem noch ein Vorzeichen. Alle Zahlen, die sich als Bruch mit einem Zähler aus der Menge der ganzen Zahlen und einem Nenner aus der Menge der ganzen Zahlen ohne 0 darstellen lässt, nennt man eine *rationale* Zahl. Die Menge der rationalen Zahlen bezeichnet man mit $\mathbb{Q}$.

Jede rationale Zahl lässt sich durch beliebig viele Brüche darstellen. Die Dezimalzahl 0.5 etwa kann durch $\frac{1}{2}$, $\frac{-3}{-6}$, $\frac{104}{208}$ und so weiter angegeben werden. Mit dem Vorzeichen vor dem Bruch und in gekürzter Form ist die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch aber eindeutig.

1.3 Stammbrüche

Einen Bruch, bei dem der Zähler 1 und der Nenner eine natürliche Zahl ist, nennt man einen *Stammbruch*. Die alten Ägypter stellten Brüche immer als Summen von Stammbrüchen dar. Statt $\frac{2}{5}$ beispielsweise schrieben sie $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Diese so genannten ägyptischen Brüche haben zwei Vorteile. Einerseits kann man jede rationale Zahl anders als bei Dezimalbrüchen immer durch endlich viele Stammbrüche angeben, und andererseits kann man bei zwei ägyptischen Brüchen schnell entscheiden, welcher von ihnen grösser ist.

1.4 Umrechnungen

Wenn es für dieselbe Zahl verschiedene Darstellungen gibt, sollte man die eine in die andere umrechnen können. Gewöhnliche Brüche lassen sich durch den Divisionsalgorithmus in Dezimalbrüche konvertieren. Endliche Dezimalbrüche und ägyptische Brüche lassen sich enfach in gewöhnliche Brüche umwandeln. Für die Konversion in einen ägyptischen Bruch gibt es ebenfalls einen Algorithmus. Wie findet man aber für eine unendliche, periodische Dezimalzahl den gewöhnlichen Bruch, der dieser Zahl entspricht?

Soll der Dezimalbruch $1.7\overline{34} = 1.7343434...$ in einen gewöhnlichen Bruch umgewandelt werden, so multipliziert man diese Zahl mit 100, um sämtliche Ziffern eine ganze Periode nach links zu verschieben, und subtrahiert die Zahl davon. Es bleibt 99 mal diese Zahl übrig, und vom Dezimalbruch mit ursprünglich unendlich vielen Ziffern nach dem Komma bleiben nur noch endlich viele Ziffern $\neq 0$:

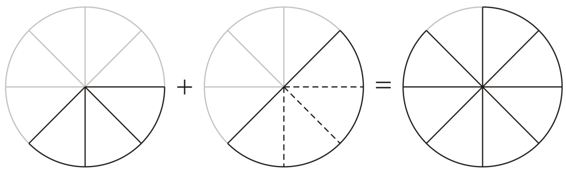
$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 173.4343434343434343434343434... \\ -x & = & -1.7343434343434343434343434... \\ \hline 99x & = & 171.7000000000000000000000000... \end{array}$$

Weil $99x = 171.7$ ist, muss $x = \frac{171.7}{99} = \frac{1717}{990}$ sein, womit man einen gewöhnlichen Bruch für den ursprünglichen Dezimalbruch gefunden hat. (Im Allgemeinen kann man den so gefundenen Bruch noch kürzen.)

2 Bruchrechnen

2.1 Addition und Subtraktion

Haben zwei Brüche denselben Nenner, kann man sie addieren oder subtrahieren, indem man die Zähler addiert oder subtrahiert. So ergibt $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ wie in der nebenstehenden Abbildung, in der zwei gleich grosse Kuchen in acht gleich grosse Stücke zerteilt wurden, von denen sieben übrig geblieben sind.



Jedes der sechzehn Kuchenstücke kann in diesem Beispiel den Platz jedes anderen Kuchenstücks einnehmen. Sind also von einen Kuchen drei und vom anderen Kuchen vier Stücke nicht gegessen worden, kann man sie zu einem Kuchen mit einem fehlenden Stück zusammenstellen. Dabei ist es unwichtig, ob beispielsweise die vier Stücke im rechten Kuchen wirklich auseinander geschnitten worden sind oder nicht.

Anders wäre es, wenn der eine Kuchen in sechs gleich grosse Stücke und der andere Kuchen in neun gleich grosse Stücke zerteilt worden wäre, denn Brüche mit verschiedenen Nennern lassen sich nicht direkt addieren oder subtrahieren, so wie man Preise in Euro und Dollar auch nicht einfach addieren kann. Verschiedene Nenner ist wie verschiedene Währungen, und man muss diese erst in eine gemeinsame Währung umrechnen. Bei Brüchen macht man das, indem man ein gemeinsames Vielfaches der beiden Nenner sucht und die beiden Brüche auf diese Zahl als Nenner erweitert. Will man etwa einen Sechstel zu zwei Neuntel addieren, sucht man erst eine gemeinsame Untereinheit – in diesem Fall ein Achtzehntel – und konvertiert beide Brüche in diese Untereinheit. In diesem Beispiel heisst das $\frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{3}{18} + \frac{4}{18} = \frac{7}{18}$. Man sagt, man habe die beiden Brüche *gleichnamig* gemacht.

2.2 Multiplikation und Division

Multiplikation und Division von Brüchen ist einfacher. Wenn man von den drei Kuchenstücken links in der obigen Abbildung die Hälfte nimmt, so ist das, wie wenn man jedes Stück in zwei gleiche Hälften zerlegt und jeweils eines davon – also insgesamt drei Sechzehntel – nimmt. Nimmt man fünf Siebtel von diesen drei Stücken, die je einen Achtel des ursprünglichen Kuchens ausmachen, so ist das ebenfalls, wie wenn man jedes Stück in sieben gleiche Teile teilt, sodass man Sechsundfünfzigstel bekommt und davon je fünf Stücke – also insgesamt fünfzehn Sechsundfünfzigstel – nimmt.

Brüche multipliziert man, indem man die Zähler und die Nenner multipliziert. Division von Brüchen ist Multiplikation mit dem Kehrwert. Hat man zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, so ist

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

das Resultat.

2.3 Potenzen und Wurzeln

Multiplikation und Division führen häufig zu einfacheren mathematischen Gesetzen als Addition und Subtraktion. Das gilt auch für Brüche, die eine nicht ausgeführte Division darstellen. Aus den Potenz- und Wurzelgesetzen folgt unmittelbar, dass

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \left(\frac{a^c}{b^c}\right) \qquad \sqrt[c]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}$$

gilt. Weil sich $\sqrt[p]{q}$ als Potenz durch $q^{\frac{1}{p}}$ schreiben lässt, folgt die rechte Seite aus der linken.

2.4 Rechnen mit Bruchtermen

Bestehen die Zähler und Nenner von Brüchen nicht einfach aus ganzen Zahlen, sondern aus allgemeineren Termen mit Variablen, gelten für die verschiedenen Operationen dieselben Gesetze. Bei Addition und Subtraktion muss man gleichnamig machen, bei Multiplikation multipliziert man Zähler und Nenner getrennt, und bei der Division multipliziert man mit dem Kehrwert. Kürzen kann man gleiche Faktoren im Zähler und im Nenner, wobei man möglichst viele Faktoren vorher ausklammern sollte. Bei Brüchen muss man beachten, dass die Bruchstriche als Klammern wirken, und dass man diese Klammern gegebenenfalls explizit setzen muss, wenn man mehrere Brüche auf einen Bruchstrich bringt.

Beispiel:

$$\frac{(3a-2)^2}{15b+3c} \div \frac{6a-4}{10b+2c} = \frac{(3a-2)^2}{15b+3c} \cdot \frac{10b+2c}{6a-4} = \frac{(3a-2)^2 \cdot (10b+2c)}{(15b+3c) \cdot (6a-4)} = \frac{(3a-2)^2 \cdot 2(5b+c)}{3(5b+c) \cdot 2(3a-2)} = \frac{3a-2}{3}$$

3 Schwierigkeiten mit Brüchen

3.1 Vergessene Klammern

Ein häufiges Problem mit Bruchtermen ist das Vergessen von Klammern. Eine korrekte Umformung ist

$$\frac{a+1}{2} \cdot \frac{a-1}{3} = \frac{(a+1)(a-1)}{2 \cdot 3} = \frac{a^2-1}{6}$$

während die Umformung dieses Bruchterms zu

$$\frac{a+1 \cdot a-1}{2 \cdot 3} = \frac{2a-1}{6}$$

falsch wäre.

Das kann man leicht überprüfen, indem man die Variable a durch Zahlen ersetzt. Mit beispielsweise $a = 10$ ergibt der ursprüngliche Bruchterm $\frac{33}{2}$. Das Ergebnis der ersten Umformung ergibt dasselbe, aber das Ergebnis der zweiten, falschen Umformung ergibt $\frac{19}{6}$. Wählt man die Werte für die Variablen ungeeignet, so kann rein zufällig auf dem korrekten und auf dem falschen Weg dasselbe Resultat herauskommen. Im obigen Beispiel liefert $a = 2$ in beiden Fällen $\frac{1}{2}$. Ergibt das Einsetzen von Zahlenwerten für die Variablen verschiedene Resultate, können zwei Terme nicht gleichwertig sein. Ergibt das Einsetzen von Zahlenwerten für die Variablen dasselbe Resultat, heisst das aber nicht, dass die beiden Terme gleichwertig sind. Um einigermassen sicher zu gehen, sollte man also immer mehrere verschiedene Zahlenwerte für die Variablen einsetzen.

3.2 Kürzen in Summen

Ein zweiter häufiger Fehler ist das Kürzen in Summen oder Differenzen. Kürzen darf man nur, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner eines Bruchterms ein Produkt ist, und wenn die beiden Produkte gemeinsame Faktoren haben. Es genügt nicht, wenn beide ein Produkt enthalten. (Ein Term ist ein Produkt, wenn man darin alle Variablen durch Zahlenwerte ersetzen kann und die letzte Operation beim Berechnen eine Multiplikation ist.) In

$$\frac{3a^2+2a}{6a+4} = \frac{a(3a+2)}{2(3a+2)} = \frac{a}{2} \qquad \frac{a+2a}{2+4} = \frac{3a}{6} = \frac{a}{2}$$

führen zwar beide Terme zufälligerweise zum gleichen Resultat, aber im ursprünglichen Term links darf man nicht $3a$ kürzen, um auf den ursprünglichen Term rechts zu kommen. Manchmal muss man einen Term wie in

$$\frac{a+b}{(a+b)^2} = \frac{1(a+b)}{(a+b)(a+b)} = \frac{1}{a+b}$$

erst künstlich in ein Produkt verwandelt, indem man beispielsweise aus $a+b$ den Term $1 \cdot (a+b)$ macht.

3.3 Aufgaben

Aufgabe 1

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}= \qquad \frac{2}{5}-\frac{1}{15}= \qquad \frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{8}=$$

Aufgabe 2

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}= \qquad \frac{9}{16}\div\frac{3}{4}= \qquad \frac{3}{7}\cdot\frac{14}{25}\cdot\frac{20}{27}=$$

Aufgabe 3

$$\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x-y}{2x+y}= \qquad \frac{5x^3-2x^2+x}{6x^3}=$$

Aufgabe 4

$$\frac{(2a-b)^3\cdot a+2b\cdot(2a-b)^2\cdot(10a-5b)}{(a+10b)\cdot(b-2a)^2}=$$

3.4 Lösungen

Lösung der Aufgabe 1

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6} \qquad \frac{2}{5}-\frac{1}{15}=\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{8}=\frac{31}{40}$$

Lösung der Aufgabe 2

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8} \qquad \frac{9}{16}\div\frac{3}{4}=\frac{3}{4} \qquad \frac{3}{7}\cdot\frac{14}{25}\cdot\frac{20}{27}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 9}=\frac{8}{45}$$

Lösung der Aufgabe 3

$$\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x-y}{2x+y}=\frac{x+y}{2x+y} \qquad \frac{5x^3-2x^2+x}{6x^3}=\frac{5x^2-2x+1}{6x^2}$$

Lösung der Aufgabe 4

$$\frac{(2a-b)^3\cdot a+2b\cdot(2a-b)^2\cdot(10a-5b)}{(a+10b)\cdot(b-2a)^2}=\frac{a(2a-b)^3+10b(2a-b)^3}{(a+10b)(2a-b)^2}=2a-b$$