Analytische Geometrie III

Rainer Hauser

Juni 2012

1 Einleitung

1.1 Geraden- und Ebenengleichungen in Koordinatenform

In der analytischen Geometrie beschreibt man geometrische Objekte durch Gleichungen. So lässt sich jede Gerade in der Ebene durch die Gleichung $ax + by = c$ und jede Ebene im Raum durch die Gleichung $ax + by + cz = d$ darstellen, wobei a, b, c und d für eine bestimmte Gerade beziehungsweise Ebene gegebene reelle Zahlen sind. Zur Geraden $2x - 3y = 5$ beispielsweise gehören genau diejenigen Punkte mit den Koordinaten (x, y), für die $2x - 3y$ gleich 5 sind, was der Menge $\{(x, y)|\, 2x - 3y = 5\}$ entspricht.

1.2 Abstände in einem Orthonormalsystem

In einem Orthonormalsystem werden Abstände in jeder Richtung mit dem gleichen Massstab gemessen, weil alle Basisvektoren die Länge 1 haben. Zudem lassen sich die Abstände mit dem Satz von Pythagoras aus den Koordinaten bestimmen, weil die Basisvektoren paarweise senkrecht aufeinander stehen. Der Abstand $d(A, B)$ der Punkte $A(a_1, ..., a_n)$ und $B(b_1, ..., b_n)$ in einem orthonormierten n-dimensionalen Vektorraum ist also durch

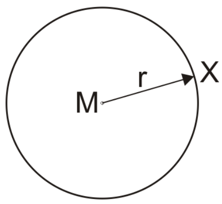
$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

definiert. Es gilt offensichtlich $d(A, B) = d(B, A)$ für beliebige Punkte A und B.

2 Kreis in der Ebene

2.1 Kreisgleichung in Mittelpunktsform

Der Kreis lässt sich als Menge aller Punkte definieren, die den Abstand r vom Mittelpunkt M haben. In einem orthonormierten zweidimensionalen Vektorraum besteht der Kreis somit genau aus den Punkten X, welche die Gleichung $|\overrightarrow{MX}| = r$ beziehungsweise $\overrightarrow{MX}^2 = r^2$ erfüllen. Hat X die Koordinaten (x, y) und M die Koordinaten (u, v), so folgt



$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2 \tag{1}$$

daraus. Diese Form der Koordinatengleichung des Kreises in der Ebene nennt man die *Mittelpunktsform.* Multipliziert man diese Gleichung aus, bekommt man

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2 = 0 \tag{2}$$

als Koordinatengleichung des Kreises in *ausmultiplizierter Form.* Aus der Kreisgleichung in Mittelpunktsform kann man direkt die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r ablesen. In der ausmultiplizierten Form ist das nicht direkt möglich.

2.2 Bestimmung von Mittelpunkt und Radius

Um aus der ausmultiplizierten Form (2) die Koordinaten des Kreismittelpunktes und den Radius zu bekommen, kann man die Kreisgleichung durch quadratisches Ergänzen in die Mittelpunktsform (1) bringen. Aus dem Term $-2ux$ kann man u und aus dem Term $-2vy$ kann man v ablesen.

Beispiel:
Gegeben ist die Kreisgleichung $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$. Aus $-10x$ folgt $u = 5$ und aus $+4y$ folgt $v = -2$. Aus $u^2 + v^2 - r^2 = 4$ lässt sich weiter $r^2 = 25$ ableiten, sodass die Gleichung in Mittelpunktsform gemäss (1) also $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$ sein muss.

2.3 Allgemeine Form der Kreisgleichung

Ist eine Gleichung $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ gegeben, so stellt sich die Frage, wie man feststellen kann, ob das die Gleichung eines Kreises ist. Ist beispielsweise $b = c = 0$ und $a \neq 0$ sowie $e \neq 0$, so stellt die Gleichung eine Parabel dar und keinen Kreis, weil sie in $y = -\frac{a}{e}x^2 - \frac{d}{e}x - \frac{f}{e}$ und damit in eine quadratische Funktion umgewandelt werden kann. Es gibt aber klare syntaktische und semantische Kriterien, ob die obige Gleichung einen Kreis beschreibt oder nicht.

Die syntaktischen Kriterien sind, dass $a = b \neq 0$ und $c = 0$ gelten muss. Erfüllt die obige Gleichung diese Bedingungen nicht, so kann sie keinen Kreis repräsentieren. Falls sie diese Kriterien erfüllt, kann die dadurch festgelegte Menge ein Kreis sein, weil man sie durch Division durch a in die Form (2) bringen kann, muss aber nicht unbedingt ein Kreis sein.

Die Gleichung, welche die syntaktischen Kriterien erfüllt muss nicht notwendigerweise einen Kreis festlegen, weil r^2 nach dem quadratischen Ergänzen eine positive Zahl sein muss. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so stellt die Gleichung keinen Kreis dar.

Beispiel:
Die Gleichung $3x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 18 = 0$ erfüllt die syntaktische Bedingung, weil die Koeffizienten von x^2 und y^2 gleich sind und kein Glied xy vorkommt. Dividiert man sie durch 3, hat sie die Form (2). Bringt man sie durch quadratisches Ergänzen in die Form (1), so wird daraus $(x-1)^2 + (y-1)^2 = -4$, was kein Kreis sein kann, weil innerhalb der reellen Zahlen keine Summe von zwei Quadraten eine negative Zahl ergeben kann. Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist also die leere Menge.

3 Anwendungen der Kreisgleichung

3.1 Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden

Weil die Kreisgleichung quadratische Terme in x und y enthält, kann ein Gleichungssystem bestehend aus einer Kreisgleichung und einer Geradengleichung zwei Lösungen haben. Geometrisch ist das einleuchtend, denn eine Gerade kann einen Kreis in zwei Punkten schneiden, in einem Punkt berühren oder ganz ausserhalb des Kreises liegen.

Beispiel:
Gegeben sei der Kreis k: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$ und die Gerade g: $2x - y = 5$. Setzt man $y = 2x - 5$ in die Gleichung von k ein und multipliziert man sie aus, bekommt man die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$ mit den beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$. Die Schnittpunkte sind also $S_1(2, -1)$ und $S_2(4, 3)$, wie man durch Einsetzen von x_1 und x_2 in die Geradengleichung von g bekommt.

3.2 Schnittpunkte zweier Kreise

Auch zwei Kreise können sich in zwei Punkten schneiden, in einem Punkt berühren oder keine gemeinsamen Punkte haben. Im Folgenden sei angenommen, die beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten. Bringt man die beiden Kreisgleichungen in die ausmultiplizierte Form (2) und subtrahiert man eine Gleichung von der anderen, so verschwinden die beiden quadratischen Terme x^2 und y^2. Die beiden

Schnittpunkte erfüllen beide Kreisgleichungen und erfüllen auch die lineare Gleichung, die durch diese Subtraktion entsteht, und die somit die Gerade durch die beiden Schnittpunkte darstellt.

Beispiel:
Gegeben seien k_1: $(x+4)^2+(y-1)^2=10$ und k_2: $(x-2)^2+(y+2)^2=25$. Multipliziert man die beiden Gleichungen aus und subtrahiert sie, bekommt man $12x-6y+24=0$ oder nach einfacher Umformung $y=2x+4$. Damit kann man y aus einer der beiden Kreisgleichungen eliminieren. Beispielsweise in k_1 eingesetzt, bekommt man die quadratische Gleichung $x^2+4x+3=0$ mit den Lösungen $x_1=-3$ und $x_2=-1$. Die Schnittpunkte sind also $S_1(-3,-2)$ und $S_2(-1,2)$. Weil S_1 und S_2 zwei verschiedene Punkte sind und beide die Gleichung x^2+4x+3 erfüllen, ist dies die Gleichung der Geraden durch S_1 und S_2.

3.3 Kreisgleichung aus drei gegebenen Punkten

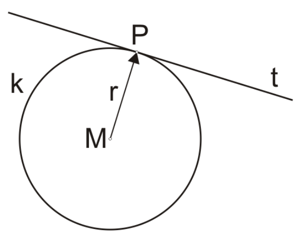
Sind drei Punkte A, B und C gegeben, die auf dem gesuchten Kreis k liegen sollen, so kann man die Gleichung für k auf zwei verschiedenen Wegen bestimmen. Einerseits kann man wie bei der Konstruktion mit Zirkel und Lineal die Geradengleichungen der Mittelsenkrechten auf $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ bestimmen, deren Schnittpunkt der Mittelpunkt des Kreises ist. Andererseits kann man aber auch als Ansatz die Gleichung $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ aufstellen und die Koordinaten der drei Punkte einsetzen, was drei Gleichungen für die drei Unbekannten u, v und r gibt.

Beispiel:
Gegeben seien die drei nicht kollinearen Punkte $A(-5,-1)$, $B(1,2)$ und $C(-3,5)$, und gesucht ist der Kreis k, der durch diese drei Punkte geht.
Die Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$ ist m_{AB}: $4x+2y=-7$, und diejenige auf $\overline{BC}$ ist m_{BC}: $8x-6y=-29$. Der Kreismittelpunkt als Lösung des Gleichungssystems bestehend aus diesen zwei Gleichungen gibt $M(-2.5,1.5)$. Aus der Länge $\overline{MB}=r$ bekommt man den Radius $r=\sqrt{12.5}$.
Macht man den Ansatz $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ und setzt man die Koordinaten der drei Punkte darin ein, so bekommt man $(-5-u)^2+(-1-v)^2=r^2$, $(1-u)^2+(2-v)^2=r^2$ und $(-3-u)^2+(5-v)^2=r^2$. Multipliziert man diese drei Gleichungen aus und subtrahiert sie, verschwinden die quadratischen Terme u^2, v^2 und r^2, und es bleiben die beiden linearen Gleichungen $4u+2v+7=0$ und $8u-6v+29=0$. Löst man das Gleichungssystem, bekommt man wie oben $M(-2.5,1.5)$. Setzt man die Koordinaten von M und B in die Ansatzgleichung ein, bekommt man $r=\sqrt{12.5}$.
Die zwei Lösungswege führen also beide zur Kreisgleichung k: $(x+2.5)^2+(y-1.5)^2=12.5$.

4 Tangentenprobleme

4.1 Tangente durch Punkt auf dem Kreis

Gegeben ist ein Kreis k sowie ein Punkt P auf k, und gesucht ist die Tangente t an k, die durch den Punkt P geht. Weil eine Gerade durch einen Punkt und einen Normalenvektor festgelegt ist, kann man mit dem Punkt P und dem Normalenvektor $\overrightarrow{MP}$ die Tangente sofort festlegen.

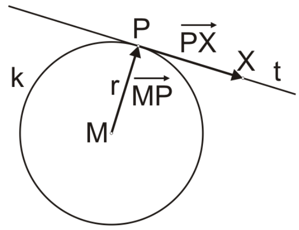


Beispiel:
Sei der Kreis k: $(x-2)^2+(y+3)^2=17$ und der Punkt $P(6,-4)$ gegeben. Der Punkt P liegt auf dem Kreis k, wie man leicht nachrechnet. Aus den beiden Ortsvektoren $\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ folgt $\overrightarrow{MP}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.
Die Geradengleichung für t hat die Form $4x-y=c$, wobei man c durch Einsetzen von P bekommt, woraus t: $4x-y=28$ folgt.

4.2 Polarisierung der Kreisgleichung

Es gibt noch einen anderen Weg, um die Tangente an einen Kreis durch einen Punkt auf dem Kreis zu bestimmen. Man kann die Kreisgleichung mit den Koordinaten des Punktes polarisieren.

Weil $\overrightarrow{MP}$ und $\overrightarrow{PX}$ senkrecht aufeinander stehen, gilt $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PX} = 0$ für jeden beliebigen Punkt X auf der Tangente t. Durch Umformung bekommt man $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MX} = \overrightarrow{MX} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MX} - \overrightarrow{MP}$, woraus für das obige Skalarprodukt $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{MP} \cdot (\overrightarrow{MX} - \overrightarrow{MP}) = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MX} - \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$ folgt. Weil $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = r^2$ ist, folgt daraus t: $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MX} = r^2$ für die Tangente t. Für $M(u, v)$, $P(a, b)$ und $X(x, y)$ bekommt man daraus



$$k : (x - u)(x - u) + (y - v)(y - v) = r^2$$
$$t : (x - u)(a - u) + (y - v)(a - v) = r^2$$

mit der Kreisgleichung etwas ungewohnt geschrieben. Man sagt, die Kreisgleichung sei mit den Koordinaten von P polarisiert.

Beispiel:
Sei derselbe Kreis k: $(x-2)^2+(y+3)^2 = 17$ und derselbe Punkt $P(6, -4)$ wie im letzten Beispiel gegeben. Die Tangentengleichung wird somit $(x - 2)(6 - 2) + (y + 3)(-4 + 3) = 17$, was vereinfacht ohne grosse Rechnerei dasselbe Resultat t: $4x - y = 28$ wie oben ergibt.

4.3 Tangente durch Punkt ausserhalb vom Kreis

Gegeben ist ein Kreis k sowie ein Punkt P ausserhalb, und gesucht sind die Tangenten t durch P an k. Ist M der Mittelpunkt von k, so sind die Schnittpunkt des Kreises k mit dem Thaleskreis auf der Strecke $\overline{MP}$ die Punkte, in denen die Tangenten den Kreis k berühren. Somit kann man mit diesen Punkten die Tangentengleichung wie vorher lösen.

4.4 Tangente parallel zu einer Geraden

Gegeben ist ein Kreis k sowie eine Gerade g, und gesucht sind die Tangenten t an k parallel zu g. Eine Gerade h durch den Kreismittelpunkt M und senkrecht zu g schneidet den Kreis k in den zwei Berührungspunkten der Tangenten. So kann man auch dieses Tangentenproblem auf den zuerst besprochenen Fall zurückführen.

5 Kugel im Raum

5.1 Kugelgleichung in Mittelpunktsform

Analog wie beim Kreis in der Ebene mit der Gleichung (1) bekommt man für die Kugel mit Mittelpunkt $M(u, v, w)$ die Kugelgleichung

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2 \tag{3}$$

in Mittelpunktsform. Durch quadratisches Ergänzen kann man $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ in die Form (3) bringen.

5.2 Kugel und Ebene

Eine Ebene kann eine Kugel in einem Kreis schneiden, in einem Punkt berühren oder keine gemeinsamen Punkte haben.

Beispiel:
Die Kugel $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 50$ wird von der xy-Ebene – also der Ebene $z = 0$ – im Kreis $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (0 - 3)^2 = 50$ oder – vereinfacht – im Kreis $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 41$ geschnitten.