Analytische Geometrie II

Rainer Hauser

März 2012

1 Einleitung

1.1 Geradengleichungen in Parameterform

Jede Gerade g in der Ebene oder im Raum lässt sich durch einen festen Punkt auf g, dessen Ortsvektor $\vec{p}$ sei, und einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$, der in dieselbe Richtung wie g zeigt, darstellen. Irgendein beliebiger Punkt auf g, dessen Ortsvektor mit $\vec{x}$ bezeichnet werde, ist somit dadurch festgelegt, dass er die Gleichung

$$g\colon \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{v}$$

für eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ erfüllt. Das ist die Parameterdarstellung der Geraden g.

1.2 Geradengleichung in Koordinatenform

Jede Gerade g in der Ebene lässt sich durch den Abstand d vom Ursprung O und durch einen Vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$, der senkrecht auf g steht und somit ein Normalenvektor ist, darstellen. Irgendein beliebiger Punkt auf g, der die Koordinaten (x, y) habe, ist somit dadurch festgelegt, dass er die Gleichung

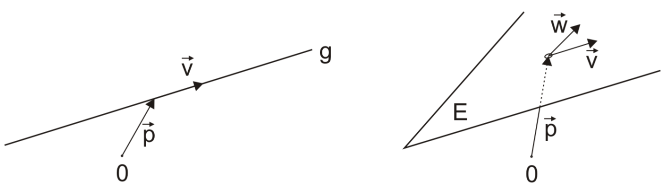
$$ax + by = c \qquad\qquad \text{mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ und } c = |\vec{n}| \cdot d = c$$

erfüllt. Das ist die Koordinatendarstellung der Geraden g.

2 Parameterdarstellung einer Ebene

2.1 Grundidee der Parameterdarstellung

Wie man jede Gerade im Raum durch einen Punkt und eine Richtung festlegen kann, lässt sich auch jede Ebene E im Raum wie in der nebenstehenden Abbildung neben der Geraden gezeigt durch einen Punkt mit Ortsvektor $\vec{p}$ und zwei linear unabhängige Richtungen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ festlegen. Irgendein beliebiger Punkt in E, dessen Ortsvektor $\vec{x}$ sei, ist somit dadurch festgelegt, dass er die Gleichung

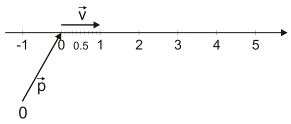


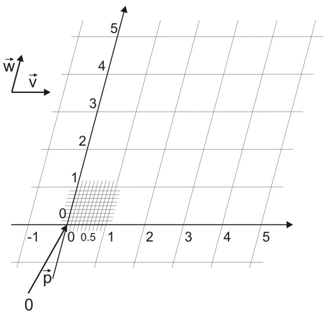
$$E\colon \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w} \tag{1}$$

für zwei Zahlen $s \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Das ist die Parameterdarstellung der Ebene E.

Vom Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ aus kann jeder Punkt auf der Geraden durch eine Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ erreicht werden. (Der Ausdruck $s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$ ist die Linearkombination.) Weil eine Ebene zweidimensional ist, braucht es auch zwei Vektoren, um sie aufzuspannen.

So wie die Parameterdarstellung einer Geraden ein eindimensionales Koordinatensystem festlegt, wobei man hier eher von einer Zahlengeraden als von einem Koordinatensystem spricht, bildet auch die Parameterdarstellung einer Ebene ein zweidimensionales Koordinatensystem darauf. Der Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ ist der Ursprung und die beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ die Koordinatenachsen wie in der nebenstehenden Abbildung dargestellt. Weil die beiden Vektoren nicht unbedingt senkrecht auf einander stehen müssen, braucht das Koordinatensystem nicht rechtwinklig zu sein, und weil die beiden Vektoren verschieden lang sein können, brauchen die Masseinheiten nicht notwendigerweise in den beiden Richtungen die gleichen zu sein.





2.2 Punkte in einer Ebene

Ist ein Punkt mit den Koordinaten (x, y, z) gegeben, so lässt sich einfach feststellen, ob er in der Ebene oder ausserhalb liegt. Das hängt davon ab, ob sich Zahlen s und t finden lassen, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist. Das führt zu drei Gleichungen mit den zwei Unbekannten s und t. Hat dieses Gleichungssystem eine Lösung, so liegt der gegebene Punkt in der Ebene, und hat es keine Lösung, so liegt der Punkt ausserhalb.

Beispiel:
Sei E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ gegeben. Wenn der Punkt $A(3, 5, -1)$ in der Ebene E liegt, so muss das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{r} 3 = 1 + 2s + 2t \\ 5 = 3s - t \\ -1 = 3 - s + 5t \end{array} \right|$$

eine Lösung haben. Aus der ersten Gleichung folgt $s + t = 1$ und aus der zweiten $t = 3s - 5$. Daraus folgt $s = 1.5$ und $t = -0.5$. Setzt man diese Werte in die dritte Gleichung ein, so zeigt sich, dass sie die Gleichung erfüllen, und dass somit $s = 1.5$ und $t = -0.5$ das Gleichungssystem lösen.

Eine Ebene ist durch drei nicht kollineare Punkte festgelegt. Wenn A, B und C aber nicht kollinear sind, müssen die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ linear unabhängig sein, sodass man $\vec{p} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ für die Parameterform der durch A, B und C aufgespannten Ebene wählen kann.

Eine Ebene ist auch durch eine Gerade und einen nicht auf dieser Geraden liegenden Punkt festgelegt. Ist die Gerade in Parameterform durch einen Punkt P und einen Richtungsvektor $\vec{v}$ gegeben, und liegt weiter der Punkt A nicht auf dieser Geraden, aber in der Ebene, so kann man P und $\vec{v}$ der Parameterdarstellung der Geraden sowie $\vec{w} = \overrightarrow{PA}$ für die Parameterdarstellung der Ebene benutzen.

2.3 Geraden in einer Ebene

Ist eine Gerade in Parameterform gegeben, so lässt sich einfach feststellen, ob sie in der Ebene oder ausserhalb liegt. Wenn entweder zwei verschiedene Punkte der Gerade auch in der Ebene liegen, oder wenn ein Punkt auf der Geraden und in der Ebene liegt und der Richtungsvektor der Geraden eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren der Ebene ist, so liegt die Gerade ganz in der Ebene.

Eine Ebene ist durch zwei sich schneidende Geraden festgelegt. Einen der beiden Ortsvektoren der beiden Geraden in Parameterform und die beiden Richtungsvektoren der beiden Geraden können für die Parameterdarstellung der Ebene benutzt werden.

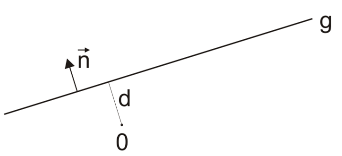
Eine Ebene ist auch durch nicht zusammenfallende, parallele Geraden festgelegt. Für die Parameterdarstellung der Ebene kann man die Parameterdarstellung der einen Geraden nehmen, der man einen weiteren parametrisierten Richtungsvektor hinzufügt. Als zweiter Richtungsvektor kann irgendein Vektor benutzt werden, der von einem Punkt auf der einen zu einem Punkt auf der anderen Geraden führt.

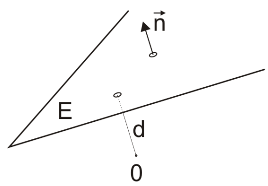
Beispiel:
Die Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind parallel, weil der Richtungsvektor von g durch 3 dividiert und mit -2 multipliziert den Richtungsvektor von h ergibt. Die beiden Geraden fallen nicht zusammen, weil der Punkt mit den Koordinaten $(4, 0, 1)$ offensichtlich auf h, aber nicht auf g liegt. Für die Parameterdarstellung der Ebene E kann man die Parameterdarstellung von g und den Vektor von $(4, 0, 1)$ nach $(1, 2, -2)$ nehmen: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Zwei sich in einem Punkt schneidende und zwei nicht zusammenfallende, parallele Geraden spannen also eine Ebene auf. Das gilt aber nicht für windschiefe Geraden, denn es gibt für zwei windschiefe Geraden keine Ebene, in der beide Geraden ganz liegen.

3 Koordinatendarstellung einer Ebene

3.1 Grundidee der Koordinatendarstellung



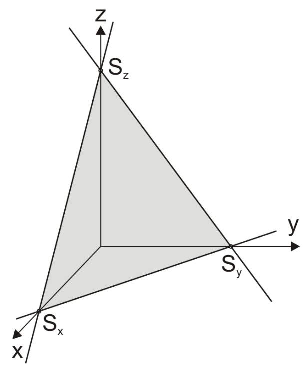


So wie man eine Gerade in der Ebene durch einen Normalenvektor $\vec{n}$ und den Abstand d vom Ursprung festlegen kann, kann man eine Ebene im Raum durch einen Normalenvektor $\vec{n}$ und den Abstand d vom Ursprung wie in der nebenstehenden Abbildung skizziert festlegen. Multipliziert man die Ebenengleichung von E in Parameterform $\vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$ mit $\vec{n}$, so bleibt $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$, weil $\vec{n}$ senkrecht auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$ steht. Setzt man $d = \vec{n} \cdot \vec{p}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, so liegt ein beliebiger Punkt mit Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ genau dann in der Ebene E, wenn

$$ax + by + cz = d \tag{2}$$

gilt. Das ist die Koordinatendarstellung der Ebene E. Jede Ebene im Raum lässt sich so darstellen, und für alle Zahlen a, b, c und d stellt die Gleichung (2) eine Ebene im Raum dar, falls mindestens eine der drei Zahlen a, b und c von 0 verschieden ist.

3.2 Achsenabschnitte



Ist $a \neq 0$ in $ax + by + cz = d$, so liegt der Punkt $S_x(\frac{d}{a}, 0, 0)$ in der Ebene. Analog liegen die Punkte $S_y(0, \frac{d}{b}, 0)$ und $S_z(0, 0, \frac{d}{c})$ in der Ebene, wenn $b \neq 0$ beziehungsweise $c \neq 0$ gilt. Ist $d = 0$, fallen diese drei Punkte mit dem Ursprung zusammen. Sind a, b, c und d alle verschieden von 0, wird die Ebene durch diese drei Punkte S_x, S_y und S_z wie in der nebenstehenden Abbildung aufgespannt. Die erste Koordinate von S_x heisst *erster Achsenabschnitt.* Der zweite und dritte Achsenabschnitt ist analog definiert. Die Achsenabschnitte sind also die gerichteten Abstände der drei Punkte S_x, S_y und S_z vom Ursprung. Fallen keine der Punkte S_x, S_y und S_z zusammen, ist eine Ebene durch drei vorgegebene Achsenabschnitte eindeutig festgelegt.

Die drei Geraden durch zwei der Punkte S_x, S_y und S_z liegen ganz in den von den entsprechenden zwei Achsen aufgespannten Ebenen. Die Gerade, die beispielsweise durch S_x und S_y geht, liegt also ganz in der xy-Ebene.

3.3 Umformung in eine andere Darstellungsform

Die Ebenengleichung in Parameterform (1) stellt ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und fünf Unbekannten dar. Eliminiert man darin die beiden Parameter s und t, bleibt eine Gleichung mit den drei Unbekannten x, y und z, und das entspricht derselben Ebene in Koordinatenform (2). Auf diese Weise lässt sich eine Ebenengleichung in Parameterform in die Koordinatenform umwandeln. (Alternativ kann man einen Normalenvektor mit dem Vektorprodukt $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ bestimmen, womit man a, b und c als Komponenten von $\vec{n}$ und d durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes in der Ebene bekommt.)

Beispiel:
Die Ebene E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ lässt sich als Gleichungssystem

$$\left| \begin{matrix} x = 1 + 2s - t \\ y = 0 + s + 3t \\ z = -1 + s + 2t \end{matrix} \right|$$

schreiben. Den Parameter s kann man eliminieren, indem man erst die zweite und dritte Gleichung von der ersten subtrahiert und anschliessend die dritte Gleichung von der zweiten subtrahiert, was zum Gleichungssystem

$$\left| \begin{matrix} x - y - z = 2 - 6t \\ y - z = 1 + t \end{matrix} \right|$$

führt. Addiert man hier das Sechsfache der zweiten Gleichung zur ersten, bekommt man

$$x + 5y - 7z = 8$$

in parameterloser Form, und das ist die gesuchte Koordinatendarstellung.

Ist eine Ebene durch eine Ebenengleichung in Koordinatenform gegeben, kann man drei nicht kollineare Punkte A, B und C bestimmen und als Parameterform $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$ wählen. Falls die Punkte S_x, S_y und S_z, die im Zusammenhang mit den Achsenabschnitten eingeführt worden sind, nicht zusammenfallen, bieten sie sich als einfache Wahl der drei Punkte offensichtlich an.

Beispiel:
Ist die Ebene $2x - 3y + 4z = 5$ gegeben, so wählt man am einfachsten die Punkte $S_x = (\frac{5}{2}, 0, 0)$, $S_y(0, -\frac{5}{3}, 0)$ und $S_z(0, 0, \frac{5}{4})$ als nicht kollineare Punkte in der Ebene. Die Ebenengleichung in Parameterform ist dann
E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

4 Gerade und Ebene

4.1 Lagen der Geraden zur Ebene

Sind eine Gerade und eine Ebene im Raum gegeben, so liegt die Gerade entweder ganz in der Ebene, ist parallel zur Ebene oder hat genau einen gemeinsamen Punkt mit der Ebene. Weil nur die Parameterdarstellung erlaubt, Geraden und Ebenen im Raum darzustellen, sei hier angenommen, Geraden und Ebenen seien in dieser Form festgelegt.

Ist der Richtungsvektor der Geraden eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren der Ebene, so liegt die Gerade entweder ganz in der Ebene oder ist parallel dazu. Welcher dieser beiden Fälle zutrifft, lässt sich einfach bestimmen. Haben Ebene und Gerade einen gemeinsamen Punkt, so liegt die ganze Gerade in der Ebene, und andernfalls sind sie parallel.

4.2 Schnittpunkte Gerade-Ebene

Ist eine Ebene E durch $\vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$ und eine Gerade g durch $\vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{u}$ gegeben, so ist der Schnittpunkt S der Punkt mit den Koordinaten (x, y, z), der beide Gleichungen erfüllt. Das führt zu einem Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten s, t und r, das genau eine Lösung hat, falls E und g genau einen Schnittpunkt haben.

Beispiel:
Seien E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Falls E und g einen Schnittpunkt $S(x_S, y_S, z_S)$ haben, so muss es Zahlen s, t und r geben, sodass die Koordinaten von S diese beiden Gleichungen erfüllen, was zum Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} 7 + 4s - 6t = 2 - r \\ 4 - 3s + t = 2r \\ 7 + 7s - 5t = 1 + r \end{vmatrix}$$

mit den Lösungen $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{3}{2}$ und $r = 2$ führt, womit $(0, 4, 3)$ die Koordinaten des Schnittpunkts sind.

4.3 Schnittwinkel Gerade-Ebene

Schneidet eine Gerade g eine Ebene E genau in einem Punkt, so lässt sich der Schnittwinkel α zwischen g und E am einfachsten über einen Normalenvektor der Ebene bestimmen. Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ die Richtungsvektoren der Ebene E und ist $\vec{u}$ der Richtungsvektor der Geraden, so ist $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ ein Normalenvektor auf E, und der Schnittwinkel lässt sich aus

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$$

berechnen.

5 Zwei Ebenen

5.1 Parallele und zusammenfallende Ebenen

Sind beide Richtungsvektoren der Ebene E_1 Linearkombinationen der Richtungsvektoren der Ebene E_2, so sind die Ebenen E_1 und E_2 parallel oder fallen zusammen. Alternativ kann man auch je einen Normalenvektor der beiden Ebenen bestimmen und überprüfen, ob sie kollinear sind. Sind sie das, so sind die Ebenen parallel oder fallen zusammen. Um zu bestimmen, ob sie parallel sind oder zusammenfallen, genügt es, von einem Punkt in der Ebene E_1 festzustellen, ob er auch in der Ebene E_2 liegt. Haben die beiden Ebenen einen gemeinsamen Punkt, so fallen sie zusammen. Andernfalls sind sie parallel.

5.2 Schnittgerade zweier Ebenen

Zwei Ebenen, die weder parallel sind noch zusammenfallen, haben genau eine Gerade gemeinsam. Man nennt sie die Schnittgerade der beiden Ebenen. Um sie zu finden, genügt es, zwei Punkte darauf zu finden.

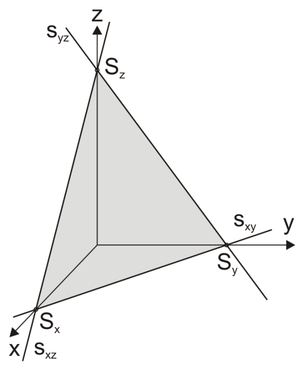
Beispiel:
Seien E: $x + 2y + 3z = 9$ und F: $2x + y + z = 6$ zwei Ebenen. Sie sind sicher weder parallel noch fallen sie zusammen, wie man den Koeffizienten ansieht. Die Punkte der Schnittgeraden müssen in beiden Ebenen liegen und sind somit genau die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{vmatrix} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{vmatrix}$$

bestehend aus den beiden Ebenengleichungen. Um zwei der unendlich vielen Lösungen zu finden, kann man versuchen, für eine der Unbekannten 0 zu setzen. Das führt in diesem Beispiel zu den drei Punkten mit den Koordinaten $(0, 9, -3)$, $(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5})$ und $(1, 4, 0)$. Zwei davon genügen, um die Schnittgerade zu bestimmen.

5.3 Spurgeraden

Durch je zwei der Basisvektoren des Koordinatensystems werden die drei Ebenen $x = 0$ (yz-Ebene), $y = 0$ (xz-Ebene) und $z = 0$ (xy-Ebene) aufgespannt. Die Schnittgeraden dieser speziellen, *Koordinatenebenen* genannten Ebenen mit einer gegebenen Ebene E nennt man die *Spurgeraden* (oder einfach *Spuren*) der Ebene E.

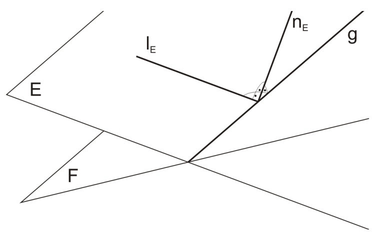


Kennt man die Achsenabschnitte und damit die Achsenschnittpunkte S_x, S_y und S_z, kann man die Spurgeraden s_{yz}, s_{xz} und s_{xy} wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt bestimmen. Falls die Ebene E nicht parallel zu einer Koordinatenachse ist und nicht durch den Ursprung des Koordinatensystems geht, legen beliebige zwei der Spurgeraden die Ebene E eindeutig fest.

Ergibt die Berechnung eines Achsenschnittpunktes, die man am einfachsten in der Koordinatenform durchführt, einen Widerspruch, so ist die Ebene parallel zur entsprechenden Koordinatenachse. Bekommt man eine allgemeingültige Gleichung mit unendlich vielen Lösungen, so liegt diese Achse ganz in der Ebene.

5.4 Schnittwinkel zweier Ebenen

Der Schnittwinkel α ist definiert als Winkel zwischen dem Lot l_E, das ganz in der Ebene E liegt und senkrecht auf der Schnittgeraden g zwischen den Ebenen E und F steht, und dem Lot l_F, das ganz in der Ebene F liegt und ebenfalls senkrecht auf g steht. In der nebenstehenden Abbildung sieht man, dass die Schnittgerade g, das Lot l_E und die Normale n_E, die senkrecht auf der Ebene E steht, drei Geraden darstellen, die je paarweise senkrecht aufeinander stehen. Somit ist der Winkel α nicht nur der Winkel zwischen l_E und l_F, sondern auch zwischen der Normalen n_E auf der Ebene E und der Normalen n_F auf der Ebene F.



Der Schnittwinkel der Ebenen E und F mit den Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$ lässt sich somit aus

$$\cos\alpha = \left| \frac{\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|} \right|$$

berechnen.

Beispiel:

Um den Schnittwinkel der Ebenen E: $2x - 3y - 5z = 9$ und F: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu bestimmen, nehmen wir die Normalenvektoren $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und berechnen

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{38 \cdot 6}}\right) \approx 78.5^\circ$$

gemäss obiger Formel.