Analytische Geometrie I

Rainer Hauser

Januar 2012

1 Einleitung

1.1 Geometrie und Algebra

Geometrie und Algebra sind historisch zwei unabhängige Teilgebiete der Mathematik und werden bis heute von Laien weitgehend so wahrgenommen. In der Geometrie konstruiert man mit Zirkel und Lineal, während man in der Algebra mit Buchstaben rechnet und Gleichungen oder Gleichungssysteme löst. Aber schon vor über zweitausend Jahren verliess die Geometrie mit dem Satz von Pythagoras das rein Konstruktive und eignete sich rechnerische Methoden an. Seither haben sich die Grenzen insbesondere durch Arbeiten von René Descartes weiter verwischt. So werden die Graphen von Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als geometrische Figuren gezeichnet, und die Ableitung in der Differenzialrechnung wird als Steigung mit dem geometrischen Begriff der Tangente in Zusammenhang gebracht. Der Zweig der Mathematik, in dem geometrische Objekte konsequent algebraisch behandelt werden, heisst *analytische Geometrie*.

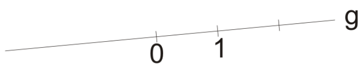
1.2 Punktmengen

Der Graph einer linearen Funktion $f(x) = ax + b$ ist eine Gerade. Diese Gerade kann als Menge aller Punkte in der (x, y)-Ebene, welche die Gleichung $y = ax + b$ erfüllen, betrachtet werden. Die Menge von Punkten $\mathbb{M} = \{(x, y) \,|\, y = ax + b\}$ stellt somit für gegebene Werte von a und b eine bestimmte Gerade dar. Analoge stellt $\mathbb{M} = \{(x, y) \,|\, y = ax^2\}$ für einen gegebenen Wert $a \neq 0$ eine Parabel dar, deren Scheitel im Ursprung des Koordinatensystems liegt, und deren Symmetrieachse mit der y-Achse zusammenfällt.

Bei diesem Ansatz stellt man eine geometrische Figur durch eine Gleichung dar, die genau diejenigen Punkte erfüllen, die zu dieser Figur gehören. Je nach dem Aspekt, den man in den Vordergrund rückt, ist $y = ax + b$ also eine Funktion im Sinne der Analysis, eine Gleichung im Sinne der Algebra oder eine Gerade im Sinne der Geometrie. Damit stehen die Methoden mehrerer mathematischen Teilgebiete zur Verfügung. Die geometrische Aufgabe beispielsweise, den Schnittpunkt zweier Geraden zu finden, führt zur algebraischen Aufgabe, ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten zu lösen.

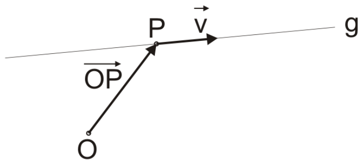
2 Parameterdarstellung einer Geraden

2.1 Grundidee der Parameterdarstellung



Eine Gerade im Raum lässt sich durch zwei verschiedene Punkte eindeutig festlegen. Zwei verschiedene Punkte auf einer Geraden legen aber auch ein eindimensionales Koordinatensystem auf der Geraden fest. Nennt man den einen Punkt 0 und den anderen 1, so hat man den Ursprung und die Masseinheit in diesem Koordinatensystem festgelegt. Jedem Punkt auf der Geraden kann man jetzt eindeutig eine Zahl zuordnen, und jeder Zahl entspricht eindeutig ein Punkt auf der Geraden. Die einem Punkt zugeordnete Zahl nennt man dessen Koordinate. Zum Punkt auf der Geraden g in der nebenstehenden Abbildung, der auf der gleichen Seite von 0 liegt wie 1, aber doppelt so weit entfernt ist, würde beispielsweise die Zahl 2 gehören.

Die Parameterdarstellung einer Geraden basiert auf demselben Prinzip, benutzt aber Vektoren statt Strecken. Jede Gerade im Raum ist durch einen Punkt und einen Richtungsvektor eindeutig festgelegt. In der nebenstehenden Abbildung ist der Punkt P und der Vektor $\vec{v}$ gewählt worden, um die Gerade g festzulegen. Für jeden Punkt Q auf der Geraden g gibt es somit eine Zahl $t \in \mathbb{R}$, sodass $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$ gilt. Die Zahl t kann man als Koordinaten des Punktes Q betrachten, indem man P als Ursprung, $|\vec{v}|$ als Einheitslänge und die Richtung von $\vec{v}$ als positive Richtung eines eindimensionalen Koordinatensystems interpretiert. Das führt zur Geradengleichung



$$g\colon \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v} \tag{1}$$

in Parameterform, wobei X ein beliebiger und P ein fest gewählter Punkt auf g ist, und $\vec{v} \neq \vec{0}$ sein muss. Die Grösse t heisst Parameter und bedeutet den gerichteten Abstand vom Punkt P in Einheiten $|\vec{v}|$.

2.2 Punkte auf einer Geraden

Um festzustellen, ob ein Punkt Q mit gegebenen Koordinaten auf einer durch die Gleichung (1) gegebenen Geraden liegt, muss man ein Gleichungssystem lösen. Liegt der Punkt auf der Geraden, muss es eine relle Zahl t geben, sodass auf der linken Seite der Ortsvektor $\overrightarrow{OQ}$ herauskommt.

Beispiel:
Seien die Gerade $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ und der Punkt $Q(4,1)$ beziehungsweise $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ gegeben, dann liegt Q genau dann auf g, wenn es ein t gibt, das $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ erfüllt, oder anders geschrieben, wenn das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} 4 = 2 + 2t \\ 1 = 3 - t \end{vmatrix}$$

eine Lösung hat. Das ist nicht der Fall, denn nach der ersten Gleichung müsste $t = 1$ und nach der zweiten $t = 2$ gelten. Somit liegt Q nicht auf g.

2.3 Parallele und senkrechte Geraden

Sind zwei Geraden $g\colon \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$ und $h\colon \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{w}$ gegeben, so lässt sich leicht feststellen, ob die beiden Geraden parallel sind oder nicht. Sind die beiden Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear, ist also einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen, so zeigen die beiden Richtungsvektoren in die gleiche Richtung oder in entgegengesetzte Richtungen, und die Geraden sind parallel. Um festzustellen, ob zwei Geraden parallel sind, genügt es also, die Richtungsvektoren zu betrachten.

Stehen die beiden Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ jedoch senkrecht aufeinander, gilt also für das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, so stehen auch die beiden Geraden g und h senkrecht aufeinander. Um festzustellen, ob zwei Geraden senkrecht aufeinander stehen, genügt es also ebenfalls, die Richtungsvektoren zu betrachten.

2.4 Zusammenfallende Geraden

Eine Gerade g ist durch zwei nicht zusammenfallende Punkte A und B eindeutig festgelegt. Als Parameterdarstellung kann man zum Beispiel $g\colon \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ wählen. Die Darstellung ist aber nicht eindeutig, denn man hätte als Punkt genauso gut B und als Richtung irgendein Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$ wählen kennen. Es stellt sich somit die Frage, wie man bei gegebenen zwei Geraden $g\colon \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$ und $h\colon \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{w}$ bestimmt, ob sie zusammenfallen und damit dieselbe Gerade bedeuten, oder ob sie verschiedene Geraden darstellen.

Damit die zwei Geraden g und h zusammenfallen, müssen sie parallel sein, sodass die beiden Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ also kollinear sein müssen. Zwei Parallelen fallen genau dann zusammen, wenn sie einen gemeinsamen Punkt haben. Zusätzlich zur Bedingung, dass die Richtungsvektoren kollinear sind, müssen die beiden Geraden also noch einen gemeinsamen Punkt haben. Man kann somit schauen, ob der Punkt P, der offensichtlich auf g liegt, auch auf h liegt, beziehungsweise ob der Punkt Q, der offensichtlich auf h liegt, auch auf g liegt.

2.5 Schnittpunkte von Geraden

In der Ebene fallen zwei Geraden entweder zusammen, sind parallel oder haben genau einen Schnittpunkt. Im Raum können zwei Geraden zudem noch windschief zueinander liegen. Schneiden sich zwei Geraden in genau einem Punkt, sind ihre Richtungsvektoren nicht kollinear, und es gibt einen Punkt S, der auf beiden Geraden liegt. (Löst man wie in diesem Fall Probleme mit zwei Geraden in Parameterform, nimmt man für die beiden Parameterdarstellungen sinnvollerweise verschiedene Parameter t und s.) Haben also die Geraden g: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$ und h: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \vec{w}$ den gemeinsamen Punkt S, so muss es eine Zahl t und eine Zahl s geben, sodass $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \vec{w}$ gilt.

Beispiel:
Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sie sind nicht parallel, und es gibt somit genau einen Punkt $S(x_S, y_S)$, der sowohl auf g als auch auf h liegt, und für den somit einerseits $\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ für einen bestimmten Wert t und andererseits $\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ für einen bestimmten Wert s gelten muss. Das führt zum Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} 2 - 3t = -1 + 3s \\ -3 + t = 2s \end{vmatrix}$$

mit der Lösung $s = -\frac{2}{3}$ und $t = \frac{5}{3}$. Setzt man den gefundenen Wert für t in g ein, oder setzt man den gefundenen Wert für s in h ein, bekommt man für die Koordinaten von S die Werte $x_S = -3$ und $y_S = -\frac{4}{3}$.

Im Raum führt das Bestimmen des Schnittpunktes zweier nicht parallelen Geraden zu drei Gleichungen mit zwei Unbekannten und hat deshalb nicht immer eine Lösung. Falls keine Lösung existiert, heisst das, dass die beiden Geraden windschief sind.

3 Koordinatendarstellung einer Geraden in der Ebene

3.1 Grundidee der Koordinatendarstellung

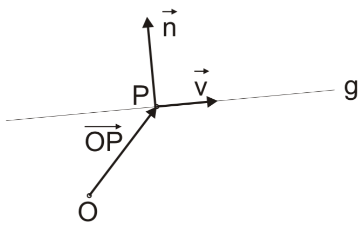
Die Geradengleichung in Parameterform (1) erlaubt es, Geraden in einer Ebene oder im Raum auf einheitliche Weise darzustellen. Ist man nur an Geraden in einer Ebene interessiert, so bestimmt die Gleichung $y = ax + b$ für beliebige Werte a und b bekanntlich eine Gerade in der (x, y)-Ebene. Die Geraden parallel zur y-Achse lassen sich aber auf diese Weise nicht darstellen, weil sie eine unendliche Steigung a haben müssten und nicht Graph einer Funktion sein können. Sie lassen sich jedoch durch $x = c$ für einen beliebigen Wert c festlegen. Die Zahl c bestimmt den Abstand von der y-Achse. Allgemein lassen sich Geraden in der Ebene durch

$$ax + by = c \tag{2}$$

darstellen, wobei $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ gelten muss. Diese Darstellungsform einer Geraden nennt man die Koordinatenform der Geradengleichung. Die Zahlen a, b und c lassen sich geometrisch interpretieren, wie im Folgenden gezeigt wird.

Ist $b \neq 0$, kann man die Geradengleichung (2) in $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ umformen und somit in die Form einer linearen Funktion bringen. Ist hingegen $b = 0$, so ist $a \neq 0$, und die Gerade ist parallel zur y-Achse, sodass sich die Geradengleichung in die Form $x = \frac{c}{a}$ bringen lässt. Im Gegensatz zur Darstellung als Graph einer linearen Funktion ist die Geradengleichung (2) aber nicht mehr eindeutig, denn die Gleichungen

$2x+3y=4$ und $4x+6y=8$ stellen dieselbe Gerade dar, weil man (2) beliebig mit einer reellen Zahl $r \neq 0$ multiplizieren kann, ohne dadurch die Lösungsmenge zu verändern. Verläuft die Gerade nicht parallel zur y-Achse, sind jedoch die Verhältnisse $a:b$ und $c:b$ eindeutig, und $-\frac{a}{b}$ ist die Steigung der Geraden, während $\frac{c}{b}$ der y-Achsenabschnitt ist.



Die Zahlen a, b und c kann man noch auf eine andere Weise geometrisch interpretieren. Formt man die Geradengleichung in Parameterform $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$ zu $\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = t \cdot \vec{v}$ um und multipliziert man diese Gleichung mit einem Normalenvektor $\vec{n}$ von $\vec{v}$, so gilt wegen $\vec{n} \cdot (t \cdot \vec{v}) = t(\vec{n} \cdot \vec{v}) = 0$ für die linke Seite dieser Gleichung $\vec{n} \cdot (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) = 0$ beziehungsweise $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$. Weil $\vec{n}$ und $\overrightarrow{OP}$ fest vorgegebene Vektoren sind und somit $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$ konstant ist, kann man $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = c$ mit $c = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$ schreiben. Setzt man weiter $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, folgt $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by = c$, und das ist die Geradengleichung in Koordinatenform (2). Die beiden Grössen a und b sind also die Koordinaten eines Vektors, der senkrecht auf der durch $ax + by = c$ festgelegten Geraden steht. Multipliziert man diese Gleichung so, dass $|\vec{n}| = 1$ ist, so ist $|c|$ der Abstand der Geraden vom Ursprung O, wie man mit den weiter unten gezeigten Methoden beweisen kann.

3.2 Eigenschaften von Geraden in der Koordinatendarstellung

Bei Geraden mit Gleichungen in der Koordinatenform $ax + by = c$ lässt sich einfach feststellen, ob ein Punkt $P(x_P, y_P)$ darauf liegt, denn in diesem Fall muss $ax_P + by_P = c$ gelten. Ergibt hingegen $ax_P + by_P$ nicht c, so liegt der Punkt P nicht auf der Geraden.

Sind zwei Punkte $A(x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$ gegeben und ist die Gerade durch A und B gesucht, so muss man a, b und c so bestimmen, dass $ax_A + by_A = c$ und $ax_B + by_B = c$ gilt. Das ist ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen, aber mit drei Unbekannten und hat somit unendlich viele Lösungen. Das entspricht der Tatsache, dass die Darstellung $ax + by = c$ nicht eindeutig ist.

Weil es in einer Ebene nur eine Richtung gibt, die senkrecht auf einer Geraden steht, sind $a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$ genau dann parallel, wenn $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ kollinear sind, und stehen diese beiden Geraden genau dann senkrecht aufeinander, wenn $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ senkrecht aufeinander stehen, das heisst, wenn $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ gilt. Parallelität und Orthogonalität lassen sich also über die Normalenvektoren bestimmen.

Sucht man den Schnittpunkt von zwei Geraden $a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$, so sucht man einen Punkt $S(x, y)$, der auf beiden Geraden liegt. Man muss dazu das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix} \right|$$

lösen, dass unendlich viele Lösungen hat, wenn die Geraden zusammenfallen, genau eine Lösung hat, wenn sich die Geraden schneiden, und keine Lösung hat, wenn die Geraden parallel sind.

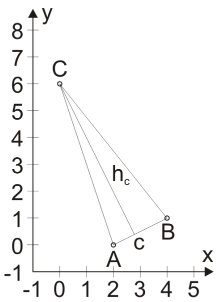
3.3 Umformung in eine andere Darstellungsform

Ist eine Gerade in der Parameterform gegeben und soll in die Koordinatenform umgeformt werden, so bestimmt man einen Normalenvektor $\vec{n}$ senkrecht zum Richtungsvektor $\vec{v}$ und nimmt dessen Koordinaten als Werte für a und b. Um c zu bestimmen, setzt man in die Gleichung $ax + by = c$ für x und y die Koordinaten des Punktes P auf der Geraden ein.

Beispiel:
Ist g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben, so macht man für die Koordinatenform den Ansatz $2x + 3y = c$ und setzt $c = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$. Die Koordinatendarstellung von g ist also $2x + 3y = 8$.

Ist umgekehrt eine Gerade in Koordinatenform gegeben und soll in die Parameterform umgeformt werden, so nimmt man a und b als Koordinaten von $\vec{n}$ und wählt einen Vektor $\vec{v}$ senkrecht dazu. Als Punkt P kann man irgendeinen Punkt auf der Geraden wählen. Am einfachsten nimmt man dafür einen Punkt, dessen x- oder y-Koordinate 0 ist.

Beispiel:
Sucht man für die Gerade mit der Koordinatendarstellung $2x + 3y = 8$ eine Parameterdarstellung, so wählt man $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, womit man g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ bekommt.



Bei Aufgaben mit Geraden in einer Ebene kann man sich fragen, welche der beiden Darstellungsformen die einfachere ist. Manchmal kommt man mit der richtigen Repräsentation ohne zu rechnen oder fast ohne zu rechnen zum Ziel.

Beispiel:
Sind die Ecken $A(2, 0)$, $B(4, 1)$ und $C(0, 6)$ eines Dreiecks gegeben und ist die Höhe h_c gesucht, so lässt sich $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ direkt aus der nebenstehenden Figur ablesen oder aus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ leicht berechnen. Wählt man als Punkt auf der Geraden h_c den Punkt $C(0, 6)$ und als Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, weil $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0$ ist, so bekommt man sofort $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ für h_c. Ist das Resultat in Koordinatenform gesucht, so kann es als $2x + y = 6$ ebenfalls ohne zu rechnen abgelesen werden, denn $\overrightarrow{AB}$ ist ein Normalenvektor von $\vec{v}$, und $C(0, 6)$ liegt auf h_c.

4 Anwendungen

4.1 Schnittwinkel zweier Geraden

Der Schnittwinkel von zwei Geraden ändert sich nicht, wenn man eine der beiden Geraden parallel verschiebt. Es kommt also bei Geradengleichungen in Parameterform nur auf die Richtungsvektoren der beiden Geraden an. Weil sich der Winkel zwischen zwei Geraden nicht ändert, wenn man beide um 90° dreht, ist der Winkel zwischen zwei Geraden auch der Winkel zwischen zwei senkrecht auf den Geraden stehenden Normalenvektoren. In der Koordinatenform kann man die Normalenvektoren direkt ablesen.

Sind $\vec{v}_g$ und $\vec{v}_h$ die Richtungsvektoren, $\vec{n}_g$ und $\vec{n}_h$ die Normalenvektoren sowie a_g und a_h die Steigungen der Geraden g und h, so kann man die Winkel α zwischen den Geraden g und h aus

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_g \cdot \vec{v}_h}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{v}_h|} \qquad \cos\alpha = \frac{\vec{n}_g \cdot \vec{n}_h}{|\vec{n}_g| \cdot |\vec{n}_h|} \qquad \tan\alpha = \frac{a_h - a_g}{1 + a_h \cdot a_g}$$

berechnen. Weil es zwischen zwei Geraden, die nicht senkrecht aufeinander stehen, zwei verschiedene Winkel gibt, die zusammen 180° ergeben, nimmt man als Konvention den kleineren davon, sodass

$$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{v}_g \cdot \vec{v}_h}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{v}_h|}\right| \qquad \cos\alpha = \left|\frac{\vec{n}_g \cdot \vec{n}_h}{|\vec{n}_g| \cdot |\vec{n}_h|}\right| \qquad \tan\alpha = \left|\frac{a_h - a_g}{1 + a_h \cdot a_g}\right|$$

gilt. Die dritte Gleichung folgt aus den Additionstheoremen der Trigonometrie.

4.2 Abstand Punkt-Gerade in der Ebene

Der Abstand zweier geometrischen Figuren ist definiert als der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten der beiden Figuren. Der Abstand zweier Punkte A und B ist also die Länge der Strecke $\overline{AB}$. Um den

Abstand eines Punktes A von einer Geraden g zu bestimmen, fällt man das Lot vom Punkt A auf g und nimmt die Strecke $\overline{AF}$ vom Punkt A zum Lotfusspunkt F als Abstand.

Beispiel:
Sind g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A(2,4)$ gegeben, so bestimmt man den Lotfusspunkt F als Schnittpunkt der Geraden g und des Lotes l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und bekommt $F(3.5, -0.5)$. Der Abstand des Punktes A von der Geraden g ist also $|\overline{AF}| = \sqrt{(2-3.5)^2 + (4+0.5)^2} \approx 4.74$.

4.3 Abstand Punkt-Gerade im Raum

Im Raum ist es nicht ganz so einfach, das Lot l zu finden, das durch den Punkt A geht und g senkrecht schneidet. Der Lotfusspunkt F liegt auf g, und $\overrightarrow{AF}$ steht senkrecht auf g. Damit lassen sich die Koordinaten von F bestimmen.

Beispiel:
Sind g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A(1,2,-3)$ gegeben, so lässt sich der kürzeste Abstand mit folgenden Schritten ermitteln. Im ersten Schritt stellt man fest, dass A wegen seiner z-Komponente nicht auf g liegen kann. Im zweiten Schritt stellt man für $F(x,y,z)$ das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{r} x = -3 + 3t \\ y = -6 + t \\ z = 3 \end{array} \right|$$

auf und fügt mit $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+3 \end{pmatrix}$ die aus $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ folgende vierte Gleichung $3(x-1)+(y-2) = 0$ hinzu. Im dritten Schritt löst man das Gleichungssystem und bekommt $t = 2$, woraus man $(3, -4, 3)$ als Koordinaten von F bestimmt. Der Abstand der Geraden g vom Punkt A ist also die Länge des Vektors $\overrightarrow{AF}$, für die $|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{76} \approx 8.72$ gilt.

4.4 Abstand zweier Geraden im Raum

Der Abstand zwischen zwei parallelen Geraden ist einfach der Abstand der Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden, die senkrecht auf beiden steht. Bei zwei windschiefen Geraden g und h ist das etwas komplizierter, denn man sucht einen Punkt G auf g und einen Punkt H auf h, sodass $\overrightarrow{GH}$ senkrecht auf g und h beziehungsweise auf deren Richtungsvektoren steht. Die Länge $|\overrightarrow{GH}|$ ist der Abstand der beiden Geraden.

Beispiel:
Seien g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Sind die Punkte $G(x_G, y_G, z_G)$ auf g und $H(x_H, y_H, z_H)$ auf h die Punkte mit dem kürzesten Abstand, so gilt für deren Koordinaten

$$\left| \begin{array}{r} x_G = 2 + 2t \\ y_G = 0 + t \\ z_G = 1 + 2t \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{r} x_H = 0 + s \\ y_H = -1 + 2s \\ z_H = 2 - 2s \end{array} \right| \qquad \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} s - 2 - 2t \\ -1 + 2s - t \\ 1 - 2s - 2t \end{pmatrix}$$

weil G auf g und H auf h liegen muss. Aus dem Skalarprodukt von $\overrightarrow{GH}$ mit den Richtungsvektoren von g und h folgt $t = -\frac{1}{3}$ und $s = \frac{2}{3}$, woraus man die Koordinaten $(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ von G und $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ von H bestimmen kann. Der kürzeste Abstand zwischen g und h ist somit $|\overrightarrow{GH}| = 1$.