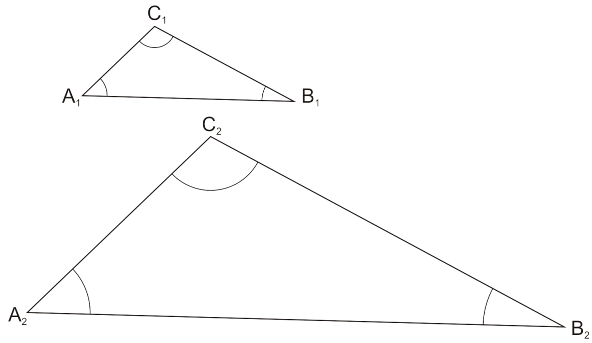
Ähnlichkeit und Strahlensätze

Rainer Hauser

Februar 2015

1 Ähnlichkeit von geometrischen Objekten

1.1 Vergrösserungen und Änderung der Masseinheiten



Betrachtet man die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ in der nebenstehenden Abbildung, so haben sie eine gewissen Ähnlichkeit. Die Seiten des grösseren Dreiecks sind 2.54-mal so lang wie diejenigen des kleineren Dreiecks. Es gilt also für die Seitelänge $\overline{A_2B_2} = 2.54 \cdot \overline{A_1B_1}$. Weil man die Einheiten in der Mathematik häufig weglassen und rein mit Zahlen rechnen kann, sollte es keine Rolle spielen, ob man die Seitenlängen in der uns gebräuchlichen Einheit Zentimeter oder in der im angelsächsischen Raum üblichen Einheit Inch angibt, wobei 1 Inch gleich lang ist wie 2.54 Zentimeter. Rechnet man also nur in Zahlen, so sind die Seitenlängen in den beiden nebenstehenden Dreiecken gleich, wobei das kleinere Dreieck in Zentimeter und das grössere Dreieck in Inch gemessen ist. Weil die entsprechenden Dreieckseiten parallel sind, müssen auch die einander entsprechenden Winkel in beiden Dreiecken gleich gross sein.

Dass man geometrische Objekte verkleinern und vergrössern kann, kennen wir aus dem Alltag. Wohnungspläne oder Landkarten, die Objekte in der Welt in verkleinerter Form darstellen, oder das Modell eines Hauses im Kleinformat, mit dem ein Architekt dem zukünftigen Hausbesitzer zeigt, wie das geplante Gebäude einmal aussehen wird, sind zwei- und dreidimensionalen Beispiele. Die wesentlichen Eigenschaften wie beispielsweise Winkel sollten im verkleinerten Modell und im realen Objekt gleich gross sein.

1.2 Verhältnisse und direkte Proportionalität

Eine weitere Beziehung, die in einem geometrischen Objekt und seinem skalierten Bild übereinstimmen, sind die *Grössenverhältnisse*. Ist in einem rechteckigen Raum im Wohnungsplan die Länge doppelt so gross wie die Breite, so gilt das auch im Raum selber. Das ist eigentlich klar, weil alle Längen um den gleichen Faktor gestaucht worden sind, als man von der Wohnung den Plan erstellte, sodass sich dieser Faktor heraus kürzt, wenn man das Verhältnis bildet. Sei der Plan im Verhältnis 1 : 100 erstellt worden, so entspricht ein Meter in der Wohnung einem Zentimeter im Plan. Ist der Raum also sechs Meter lang und drei Meter breit, so ist der Raum auf dem Plan sechs Zentimeter lang und drei Zentimeter breit.

Daraus folgt offensichtlich auch, dass die entsprechenden Längen zueinander *proportional* sind. Der Proportionalitätsfaktor ist die Skalierungsgrösse. Im Beispiel des Wohnungsplans ist der Proportionalitätsfaktor also 100 oder 0.01 je nachdem, ob man von den Längen in der Wohnung auf die Längen im Plan oder umgekehrt schliessen will. Weil im Dezimalsystem Zehnerpotenzen besonders einfach sind, sind bei Plänen Verhältnisse wie 1 : 10 oder 1 : 100 und bei Landkarten Verhältnisse wie 1 : 10 000 und 1 : 100 000 oder – etwas weniger einfach zum Umrechnen – 1 : 25 000 oder 1 : 50 000 gebräuchlich. Bei Verhältnissen hat sich eingebürgert, dass man sie mit ganzen Zahlen und nicht mit Dezimalbrüchen angibt. Für die beiden Dreiecke in der obigen Abbildung würde man also nicht 1 : 2.54, sondern eher 100 : 254 oder 50 : 127 schreiben.

1.3 Ähnlichkeit von Dreiecken

Die eben beschriebene Eigenschaft von zwei geometrischen Objekten, dass sie durch Skalierung ineinander übergehen, lässt sich mathematisch sauber beschreiben. Für den Hausgebrauch genügt aber ein intuitives Verständnis. Diese Eigenschaft heisst *Ähnlichkeit*, sollte aber nicht mit dem umgangssprachlichen Begriff verwechselt werden. Zwei Personen sehen sich ähnlich, wenn sie sich gleichen. Das lässt sich aber nicht mit dem Massstab nachweisen, wie das bei der Ähnlichkeit von Dreiecken der Fall ist.

Weil die Ähnlichkeit besonders häufig bei Dreiecken gebraucht wird, benutzen wir hier eine Eigenschaft ähnlicher Dreiecke als Definition. Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie je zwei gleich grosse Winkel haben. Der dritte Winkel muss dann wegen der Winkelsumme im Dreieck ebenfalls in beiden Dreiecken gleich gross sein. Haben zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ gleiche Winkel bei A_1 und A_2 sowie bei B_1 und B_2, so gilt $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{A_1C_1} : \overline{A_2C_2} = \overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_2}$.

1.4 Aufgaben

Aufgabe 1

Ein rechtwinkliges Dreieck hat die beiden Kathetenlängen $a_1 = 30$ und $b_1 = 40$. Ein dazu ähnliches Dreieck hat die Kathete $a_2 = 45$. Bestimmen Sie die beiden anderen Dreiecksseiten des grösseren Dreiecks.

Aufgabe 2

Begründen Sie, weshalb auch die entsprechenden Höhen in zwei ähnlichen Dreiecken im gleichen Verhältnis stehen wie die Seiten.

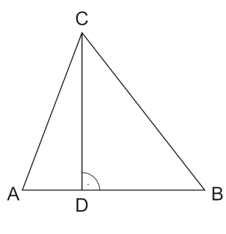
1.5 Lösungen

Lösung der Aufgabe 1

Das Dreieck mit den Katheten a_1 und b_1 ist rechtwinklig, womit auch das andere Dreieck rechtwinklig sein muss. Die Hypotenuse ist $c_1 = 50$ gemäss Satz von Pythagoras. Weil $a_2 = 1.5 \cdot a_1$ gilt, ist das Dreieck mit der Kathete a_2 das grössere Dreieck, und für die beiden anderen Seiten gilt ebenfalls $b_2 = 1.5 \cdot b_1 = 60$ und $c_2 = 1.5 \cdot c_1 = 75$.

Lösung der Aufgabe 2

Die Winkel bei A, B und C sind bei beiden Dreiecken gleich, weil sie ähnlich sind. Die Höhe steht immer senkrecht auf der Grundseite, sodass der Winkel bei D im Dreieck BCD 90° sein muss. Die beiden ähnlichen Dreiecke BCD haben somit bei B und D die gleichen Winkel und sind gemäss unserer Definition ebenfalls ähnlich. Dasselbe gilt für das Dreieck ACD. (In der nebenstehenden Abbildung ist nur eines der beiden Dreiecke gezeigt.)

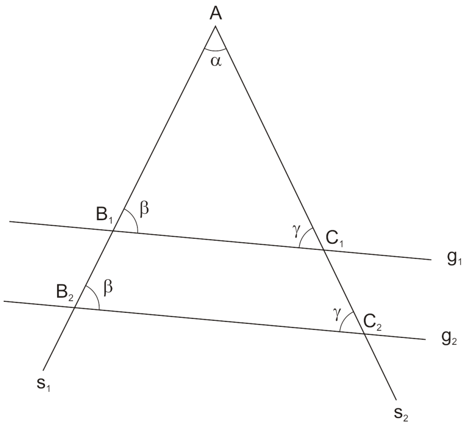


2 Strahlensätze und zentrische Streckung

2.1 Drei verwandte Konzepte

Im Bereich Ähnlichkeit von geometrischen Objekten gibt es drei Konzepte, die miteinander verwandt sind. Das eine Konzept ist die Ähnlichkeit, bei der Objekte ausser in Bezug auf ihre Grösse gleiche Eigenschaften zeigen wie etwa das Modell eines Hauses in Styropor und die Hauspläne dazu, die einem zukünftigen Bewohner die räumlichen Beziehungen im Massstab 1 : 100 zeigen. Dabei ist das Modell dreidimensional, während die Pläne zweidimensional sind. Die Ähnlichkeit ist also ein Konzept sowohl für beliebige räumliche wie auch planare Objekte. Ein zweites Konzept ist die zentrische Streckung, die eine Abbildung in der Ebene oder im Raum definiert, bei der Strecken in einem bestimmten Verhältnis vergrössert oder verkleinert werden. Das dritte Konzept sind die so genannten Strahlensätze.

2.2 Zwei Strahlensätze

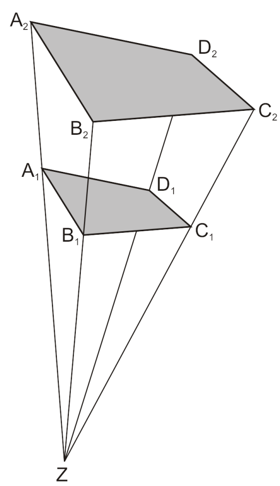


Gegeben sind zwei parallele Geraden g_1 und g_2 und ein Punkt A, der nicht auf diesen Geraden und somit entweder zwischen den beiden Geraden oder ausserhalb wie in der nebenstehenden Abbildung liegt. Wenn vom Punkt A aus zwei Strahlen s_1 und s_2 die beiden parallelen Geraden g_1 und g_2 schneiden, so müssen die entstehenden Winkel β bei den Schnittpunkten B_1 und B_2 beziehungsweise die Winkel γ bei den Schnittpunkten C_1 und C_2 gleich sein. Somit sind die beiden Dreiecke AB_1C_1 und AB_2C_2 gemäss unserer oben eingeführten Definition ähnlich. Weil die beiden Dreiecke ähnlich sind, müssen die Seitenverhältnisse gleich sein. Das sind denn auch die Behauptungen der beiden Strahlensätze.

Der *erste Stahlensatz* besagt, dass $\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = \overline{AC_1} : \overline{AC_2}$ gilt, während der *zweite Strahlensatz* für die Seiten auf den Parallelen besagt, dass $\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = \overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_2}$ gilt. Zusammenfassend lässt sich also $\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = \overline{AC_1} : \overline{AC_2} = \overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_2}$ sagen. Die Strahlensätze gelten unabhängig davon, ob A zwischen den beiden parallelen Geraden liegt oder ausserhalb.

Der so genannte Daumensprung, mit dem man die Entfernung eines Gegenstandes in der Landschaft schätzen kann, basiert auf den Strahlensätzen und darauf, dass man Grössen besser schätzen kann als Entfernungen. Weil der Daumen einer Hand bei ausgestrecktem Arm etwa 70 Zentimeter vom Auge entfernt ist, während der Augenabstand etwa 7 Zentimeter beträgt, ist das Verhältnis etwa 1 : 10, hängt aber offensichtlich von der Person ab. Springt der Daumen also etwa 12 Meter auf der Fassade eines Hauses, wenn ich erst mit dem einen Auge und dann mit dem anderen Auge meinen Daumen bei ausgestrecktem Arm beobachte, so ist das Haus etwa 120 Meter entfernt.

2.3 Zentrische Streckung



Will man eine geometrische Figur wie das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ in der nebenstehenden Abbildung proportional vergrössern oder verkleinern, sodass die entstehende Figur zur ursprünglichen Figur ähnlich ist, so kann man das mit einer *zentrischen Streckung* erreichen. Man legt einen Punkt Z fest und zieht von ihm aus Geraden durch die Punkte der ursprünglichen Figur, skaliert die Strecken zwischen Z und diesen Punkten mit dem gewünschten Faktor und bekommt so die skalierte Figur. In der nebenstehenden Abbildung ist der Faktor 1.5 benutzt worden. Somit sind die Strecken von Z zu den Punkten A_2, B_2, C_2 und D_2 anderthalb mal so lang wie die Strecken von Z zu den entsprechenden Punkten A_1, B_1, C_1 und D_1.

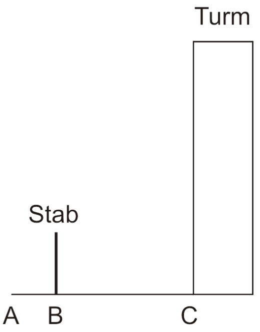
Während der erste Strahlensatz sagt, dass $\overline{ZA_1} : \overline{ZA_2} = \overline{ZB_1} : \overline{ZB_2}$ gilt, falls die Strecken $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$ parallel sind, benutzt die zentrische Strecke die umgekehrte Tatsache, dass die beiden Strecken $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$ parallel sind, falls die Verhältnisse $\overline{ZA_1} : \overline{ZA_2}$ und $\overline{ZB_1} : \overline{ZB_2}$ gleich sind. Die zentrische Streckung kann in der Ebene oder im Raum benutzt werden. Weil das Streckzentrum Z mit zwei Punkten der zu streckenden Figur und deren Bildpunkten immer in einer Ebene liegt, bleiben die Strahlensätze anwendbar.

Der so genannte Pantograph, der auch als Storchenschnabel bezeichnet wird, ist ein Gerät, mit dem man Zeichnungen vergrössern oder verkleinern kann. Seine Funktionsweise beruht auf der zentrischen Streckung, die mechanisch ausgenutzt wird.

2.4 Aufgaben

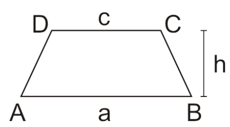
Aufgabe 3

Um die Höhe eines Turmes zu bestimmen, messen Sie erst die Länge des Turmschattens $\overline{AC} = 17.2\,\text{m}$ und stellen anschliessend beim Punkt B einen zwei Meter hohen Stab auf, sodass er ganz im Schatten des Turms steht, der oberste Punkt aber in der Sonne sein würde, wenn man ihn ein wenig hebt. Die linke obere Ecke des Turms, die Spitze des Stabs und der Punkt A liegen also auf einer Geraden. Sie messen weiter den Abstand $\overline{AB} = 1.35\,\text{m}$. Bestimmen Sie mit diesen Angaben die Höhe des Turms.



Aufgabe 4

Gegeben ist das Trapez in der nebenstehenden Abbildung, bei dem die Längen $a = 10.0\,\text{cm}$, $c = 7.5\,\text{cm}$ und $h = 6.0\,\text{cm}$ gegeben sind. Wenn man die beiden Trapezseiten AD und BC nach oben verlängert, bis sie sich im Punkt P schneiden, entsteht ein Dreieck ABP. Bestimmen Sie dessen Höhe auf die Seite AB.



2.5 Lösungen

Lösung der Aufgabe 3

Gemäss den Strahlensätzen ist das Verhältnis des Abstandes $\overline{AB}$ zur Stablänge gleich dem Verhältnis des Abstandes $\overline{AC}$ zur Turmhöhe. Somit gilt $2 : 1.35 = h : 17.2$ für die Höhe h des Turms. Daraus folgt aber $h = \dfrac{2 \cdot 17.2}{1.35}$, und die Turmhöhe misst vernünftig gerundet $25.5\,\text{m}$.

Lösung der Aufgabe 4

Weil $\overline{DC} : \overline{AB} = c : a = 3 : 4$ gilt, muss auch $\overline{PD} : \overline{PA} = \overline{PR} : \overline{PQ} = 3 : 4$ sein. Es gilt also $\overline{PR} : (\overline{PR} + 6) = 3 : 4$. Setzen wir $\overline{PR} = x$, bekommen wir die Gleichung $\dfrac{x}{x+6} = \dfrac{3}{4}$, die man in $4x = 3(x+6) = 3x + 18$ umformen kann, was zur Lösung $x = 18$ führt. Die Länge $\overline{PR}$ ist also $18\,\text{cm}$, womit die gesuchte Höhe $\overline{PQ}$ im Dreieck ABP $24\,\text{cm}$ ist. (Diese Aufgabe kann man auch ohne Gleichung lösen, denn h muss ein Teil sein, wenn $\overline{PR}$ drei und $\overline{PQ}$ vier Teile ist. Somit ist die gesuchte Höhe $4 \cdot 6\,\text{cm}$.)