16. Materiewellen und erste Schritte in die Quantenmechanik

Rainer Hauser

August 2011

1 Einleitung

1.1 Welle-Teilchen-Dualismus des Lichts

Am Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts war für die Physiker klar, dass Licht als Teil des elektromagnetischen Spektrums eine Welle ist. Als Albert Einstein zeigte, dass der Fotoeffekt erklärt werden kann, wenn man annahm, dass Licht aus masselosen Teilchen besteht, war dies plötzlich nicht mehr sicher. Licht ist also nicht nur Welle, sondern auch Teilchen, denen man den Namen *Photonen* gab. Nur Teilchen konnte Licht aber nicht sein, weil die Beugung durch die Teilchennatur des Lichts nicht erklärt werden kann. So prägte man den Ausdruck Welle-Teilchen-Dualismus des Lichts dafür, dass Licht teilweise als Teilchen und teilweise als Welle modelliert werden musste.

1.2 Welle-Teilchen-Dualismus der Materie

Bis zum Jahr 1924 war für die Physiker aber wenigstens klar, dass Materie aus Teilchen wie Protonen, Neutronen und Elektronen bestand, als Louis de Broglie in seiner Doktorarbeit die Hypothese aufstellte, dass auch Materie sowohl Eigenschaften von Teilchen als auch von Wellen hat. Wenige Jahre später wurde seine Hypothese durch Experimente, die Interferenz bei Elektronen zeigten, bestätigt. In der Zwischenzeit sind ähnliche Experimente für andere Elementarteilchen, für ganze Atome und sogar für Moleküle durchgeführt worden, und es ist nicht zu bezweifeln, dass auch Materie Wellencharakter hat.

2 Wellennatur der Materie

2.1 Elektronen

Wenn man Elektronen als Welle beschreibt, kann man ihnen die kinetische Energie und den Impuls

$$E = h \cdot f \qquad\qquad p = \frac{h}{\lambda} \tag{1}$$

zuordnen, wobei $h = 6.6261 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ das *Planck'sche Wirkungsquantum*, f die Frequenz und λ die Wellenlänge ist. Die Beziehung $E = h \cdot f$ hat Einstein ursprünglich für die Photonen postuliert.

2.2 Wellennatur im Alltag

Die Frage ist, weshalb man von der Wellennatur der Materie im Alltag nichts spürt. Um zu sehen, dass im Alltag keine Beugungserscheinungen auftreten, berechnen wir die Wellenlänge einer Person mit Masse $m = 66\,\mathrm{kg}$, die mit der Geschwindigkeit $v = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ durch eine Türe geht. Die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.6261 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{66\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 10^{-35}\,\mathrm{m}$$

und das ist so viel kleiner als die Breite der Türe, dass man keine Beugungserscheinungen wahrnimmt.

3 Wellenfunktion

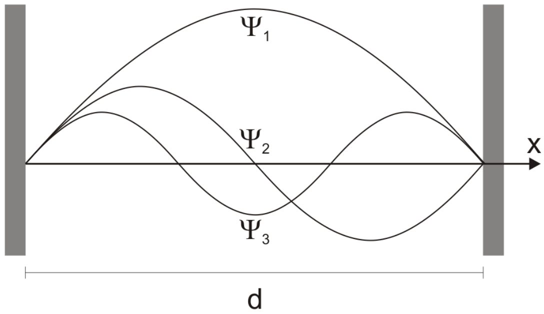
3.1 Allgemeine Wellenfunktion

Weil sowohl beim Licht als auch bei der Materie gewisse Aspekte durch das Teichenmodell und andere durch das Wellenmodell beschrieben werden können, wird in der modernen Physik nicht mehr zwischen ihnen unterschieden, und man spricht einfach von *Quantenobjekten*. Die Frage ist nicht, was diese Quantenobjekte sind, sondern wie man ihr Verhalten einheitlich beschreiben kann. In der *Quantenmechanik* ist es gelungen, die beiden Aspekte von Teilchen und Welle zu einem Modell zu vereinen. Der Welle-Teilchen-Dualismus ist verschwunden, aber auch die Anschaulichkeit ist dabei grösstenteils verloren gegangen.

In der Quantenmechanik wird ein Quantenobjekt durch eine orts- und zeitabhängige Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ beschrieben, wobei $|\Psi(x,t)|^2$ proportional zur Anzahl Teilchen im Zeitpunkt t am Ort x ist. Die Wellenfunktion beschreibt also die Intensität. Betrachtet man eine grosse Zahl von Quantenobjekten, beschreibt $|\Psi(x,t)|^2$ die Häufungsstellen. Bei Beugungsexperimenten mit Photonen beispielsweise gibt das die Helligkeitsverteilung an. Wenn man jedoch einzelne Quantenobjekte betrachtet, ist $|\Psi(x,t)|^2$ die Wahrscheinlichkeit, das Quantenobjekt zur Zeit t am Ort x zu finden. In gewissen Fällen genügt es, den zeitunabhängigen, nur vom Ort abhängigen Teil $\Psi(x)$ der Wellenfunktion zu betrachten.

3.2 Wellenfunktion gebundener Materie

Wenn Quantenobjekte durch Wellenfunktionen beschrieben werden können, ist es naheliegend, dies auch für Elektronen zu tun, die in einem Atom gebunden sind. Dies ist Erwin Schrödingen durch das Lösen der heute nach ihm *Schrödingergleichung* genannten Gleichung gelungen. Statt Elektronen gebunden in einem Atom betrachten wir hier zur Vereinfachung ein einzelnes Elektron, das sich längs der x-Achse mit konstanter Geschwindigkeit v zwischen zwei Wänden hin- und herbewegt.



Die Wände haben wie in der oben stehenden Abbildung gezeigt den Abstand d, und das Elektron wird vollkommen elastisch reflektiert. Weil das Elektron weder in die Wände eindringen noch aus dem Gebiet zwischen den beiden Wänden ganz ausbrechen kann, müssen für alle t die Randbedingungen $\Psi(x,t) = 0$ für $x = 0$ und $x = d$ gelten. Zwischen den Wänden überlagern sich die Wellen des hin- und herfliegenden Elektrons, was zu stehenden Wellen führt. Für den ortsabhängigen Teil der Wellenfunktion gilt

$$\Psi_n(x) = A_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right) \qquad\qquad \lambda_n = \frac{2d}{n} \tag{2}$$

mit $n = 1, 2, 3, ...$ Die Graphen von Ψ_1, Ψ_2 und Ψ_3 sind oben abgebildet, was zudem die Analogie zu schwingenden Saiten eines Streichinstruments betont.

Das Quadrat des ortsabhängigen Teils ist ein Mass für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit, das Elektron an einer bestimmten Stelle x vorzufinden. Diese Wahrscheinlichkeit ist also dort, wo $\Psi_n(x)$ ein Maximum oder Minimum hat, am grössten. Ist das Elektron im Grundzustand $n = 1$, so ist die Wahrscheinlichkeit gross, es bei $x = \frac{d}{2}$ zu finden. Ist das Elektron jedoch im angeregten Zustand $n = 2$, befindet es sich mit hoher Wahrscheinlichkeit bei $x = \frac{d}{4}$ oder $x = \frac{3d}{4}$.

Weil für die Wellenlänge nach (2) nur diskrete Werte möglich sind, gilt dies auch für den durch (1) definierten Impuls, sodass dieser nur die Werte

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{h}{2d}n \tag{3}$$

für $n = 1, 2, 3, ...$ annehmen kann. Die Formel (3) heisst aber, dass der Impuls mindestens $\frac{h}{2d}$ sein muss und sich das Elektron somit nie in Ruhe befinden kann.