2. Kinematik und die Gesetze der Bewegung

Rainer Hauser

September 2012

1 Einleitung

1.1 Bewegung eines Massenpunktes

Unter der *Bewegung* eines Körper versteht man dessen Veränderung des Ortes oder der Ausrichtung. Bewegung beschreiben heisst angeben, an welchem Ort sich ein Körper zu welcher Zeit befindet.

Wenn man nur an der Veränderung des Ortes, nicht aber an der Veränderung der Ausrichtung interessiert ist, betrachtet man den Körper als *Massenpunkt*, indem man ihn zu einem Punkt zusammenschrumpfen lässt. (Vom Eiffelturm aus gesehen sind die Menschen unten auf dem Platz nicht viel mehr als Punkte.)

1.2 Relativität

Bewegung ist nicht absolut beschreibbar und hängt vom Beobachter ab, weil man nicht Bewegung im Raum beschreiben kann, sondern nur Bewegung in Bezug auf andere Körper. Sitzt jemand im Zug und hat seinen Koffer über sich ins Gepäcknetz gelegt, so bewegt sich der Koffer relativ zu ihm nicht. Sieht jemand den vorbeifahrenden Zug mit dem Koffer im Gepäcknetz, so bewegt sich der Koffer relativ zu ihm jedoch schon. Deshalb sagt man, Bewegung sei *relativ*.

2 Beschreibung von Bewegung

2.1 Beschreibung durch Ortsangaben

Weil Bewegung relativ ist, muss man erst ein *Bezugssystem* für Ort und Zeit festlegen. Solche Bezugssysteme nennt man auch *Koordinatensysteme*. Will man die Bewegung eines Zuges auf einer bestimmten Strecke beschreiben, genügt ein eindimensionales Bezugssystem, denn man kann einen Punkt auf den Gleisen als Nullpunkt, eine Richtung als positiv und ein Längenmass als Abstand vom Nullpunkt festlegen und kann so jeden Punkt, den der Zug auf dieser Strecke erreichen kann, mit einer Zahl beschreiben, die den gerichteten Abstand vom Nullpunkt darstellt. Für allgemeinere Bewegungen in der Ebene oder im Raum braucht man zwei- oder dreidimensionale Koordinatensysteme.

Im Folgenden sei angenommen, dass das räumliche Bezugssystem eindimensional sei und somit als Gerade gezeichnet werden kann. Das obige Beispiel eines Zuges auf einer bestimmten Strecke lässt sich so darstellen. Man kann sich die in Wirklichkeit normalerweise nicht immer geradlinigen Gleise zu einer Geraden gestreckt vorstellen.

Beschreibt man Bewegung durch Ortsangaben, so gibt man an, an welchem Ort im gewählten Bezugssystem sich der Körper oder Massenpunkt zu welcher Zeit befindet. Diese Angaben können sehr detailliert sein, wenn man etwa den Ort für jede Zehntelsekunde angibt. Sie können aber auch sehr grob sein, wenn man beispielsweise für einen Schnellzug im Fahrplan nur angibt, dass er sich sich um 17:20 in Zürich und um 17:54 in Winterthur befindet.

In der Physik gibt man den Abstand zwischen zwei Orten in m (Meter) und die Zeit in s (Sekunden) an.

2.2 Beschreibung durch Geschwindigkeiten

Man kann die Strecke von Zürich nach Winterthur mit einem Schnellzug bewältigen, man kann aber auch zu Fuss gehen. Ein wichtiger Unterschied dabei ist sicher die Zeit, die man für diese Strecke braucht.

Die *Geschwindigkeit* v ist definiert als der zurückgelegte Weg dividiert durch die dafür benötigte Zeit. Sie wird entsprechend in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Meter pro Sekunde) gemessen.

Befindet sich ein Massenpunkt in einem eindimensionalen Bezugssystem zum Zeitpunkt t_1 am Ort s_1 und zum Zeitpunkt t_2 am Ort s_2, so gilt

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \Delta s = s_2 - s_1 \qquad \Delta t = t_2 - t_1 \tag{1}$$

für die Geschwindigkeit v.

Weil ein eindimensionales Koordinatensystem eine positive und eine negative Richtung hat, kann Δs und damit auch die Geschwindigkeit v negativ werden. Bewegt sich ein Massenpunkt mit negativer Geschwindigkeit, so heisst das, dass er sich rückwärts im Sinn des Koordinatensystems bewegt.

Diese Grösse ist die *Durchschnittsgeschwindigkeit* zwischen den Orten s_1 und s_2. Daneben gibt es die *Momentangeschwindigkeit*, die angibt, mit welcher Geschwindigkeit sich der Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt bewegt. Die Momentangeschwindigkeit lässt sich in einem Auto am Tachometer ablesen, während man die Durchschnittsgeschwindigkeit am Ende einer Fahrt als gefahrene Strecke dividiert durch die dafür gebrauchte Zeit gemäss (1) bestimmen kann.

2.3 Beschreibung durch Beschleunigung

Wenn jemand auf dem Weg zum Bahnhof merkt, dass er zu langsam geht und so den Zug nicht erreichen wird, beginnt er zu rennen und beschleunigt sich damit.

Die *Beschleunigung* a ist definiert als die Geschwindigkeitsänderung dividiert durch die verstrichene Zeit.

Hat ein Massenpunkt in einem eindimensionalen Bezugssystem zum Zeitpunk t_1 die Geschwindigkeit v_1 und zum Zeitpunkt t_2 die Geschwindigkeit v_2, so gilt

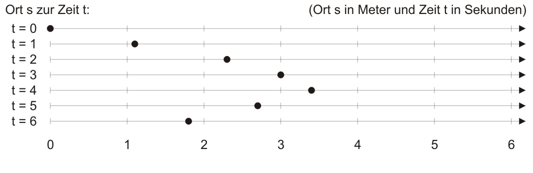
$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \Delta v = v_2 - v_1 \qquad \Delta t = t_2 - t_1 \tag{2}$$

für die Beschleunigung a. Man misst sie in $\frac{m}{s^2}$.

3 Mathematische Darstellungsmöglichkeiten

3.1 Bildsequenzen und Tabellen

Man kann Ort und Ausrichtung eines Körpers wie bei einem Film als Sequenz von Bildern zu verschiedenen Zeiten darstellen. Im eindimensionalen Fall kann man den Massenpunkt als Punkt auf einer Strecke zeigen. Alternativ lassen sich diese Werte aber auch einfach als Tabelle präsentieren.



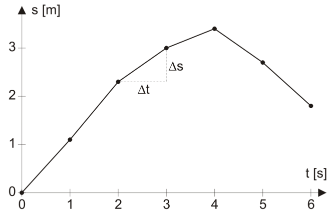
Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Massenpunkt, der sich in einem eindimensionalen Bezugssystem bewegt, zu sieben Zeitpunkten. Er bewegt sich erst nach rechts in positiver Richtung und dann nach links in negativer Richtung.

In der nebenstehenden Abbildung sind dieselben Daten als Tabelle dargestellt. Unter den Zeit- und zugehörigen Ortsangaben sind auch Δt, Δs und die Durchschnittsgeschwindigkeit v gezeigt.

t =	0		1		2		3		4		5		6
s =	0.0		1.1		2.3		3.0		3.4		2.7		1.8
Δt =		1		1		1		1		1		1	
Δs =		1.1		1.2		0.7		0.4		-0.7		-0.9	
v =		1.1		1.2		0.7		0.4		-0.7		-0.9	

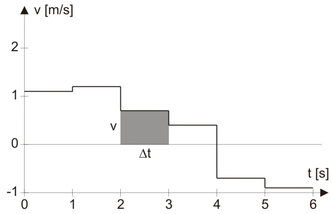
3.2 Diagramme

Zwei Diagrammtypen werden in der Kinematik häufig eingesetzt. Das eine heisst *Orts-Zeit-Diagramm* und zeigt den zu einem Zeitpunkt gehörigen Ort. Die Steigung in diesem Diagramm entspricht der durchschnittlichen Geschwindigkeit v zwischen zwei Messpunkten. Das andere gebräuchliche Diagramm heisst *Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm* und zeigt die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt.



(a)

In der linken Abbildung ist das Orts-Zeit-Diagramm für die im obigen Beispiel als Bildsequenz und Tabelle gezeigte Bewegung dargestellt, während die rechte Abbildung das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm für diesen Bewegungsablauf zeigt.



(b)

Weil in diesem Beispiel nur eine Messung pro Sekunde gemacht wurde, sind die Geschwindigkeiten jeweils Durchschnittsgeschwindigkeiten zwischen zwei Messungen. Diese Durchschnittsgeschwindigkeiten zeigen sich im Orts-Zeit-Diagramm als Steigung, während sie sich im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm als horizontales Streckenstück zeigen. (Die Strecke s entspricht dort der grauen Fläche.)

3.3 Bewegungsgleichungen

In gewissen Fällen lässt sich der Zusammenhang zwischen Ort und Zeit durch eine Gleichung von der Form $s = f(t)$ darstellen. Die im Folgenden ausführlich diskutierten Spezialfälle der gleichförmigen Bewegung und der gleichmässigen Beschleunigung lassen sich so beschreiben.

4 Spezialfälle

4.1 Gleichförmige Bewegung

Bewegt sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit v, so spricht man von gleichförmiger Bewegung. Die Bewegungsgleichung lautet in diesem Fall

$$s = v \cdot t \qquad\qquad s = s_0 + v \cdot t \tag{3}$$

wenn der Körper zur Zeit $t = 0$ bei $s = 0$ beziehungsweise bei $s = s_0$ startet.

Die in (3) gezeigte Abhängigkeit des Ortes von der Zeit im Orts-Zeit-Diagramm ist in diesem Fall eine Gerade, denn als Funktion $s = f(t)$ ist sie eine lineare Funktion.

4.2 Der freie Fall

Ein Körper im freien Fall lässt sich durch die Bewegungsgleichung

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \qquad\qquad g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{4}$$

beschreiben. Die Grösse g heisst *Erdbeschleunigung*. (Diese ist nicht wirklich konstant, denn am Äquator ist sie etwas kleiner als am Nord- und Südpol, die Abweichung ist aber sehr klein.)

4.3 Gleichmässige Beschleunigung

So wie die gleichförmige Bewegung, bei der sich die Geschwindigkeit v nicht ändert, sondern während der ganzen Zeit gleich bleibt, ist auch Bewegung mit gleichmässiger Beschleunigung, bei der sich die Beschleunigung a nicht ändert, ein wichtiger Spezialfall. Der freie Fall gemäss (4) ist ein Beispiel für Bewegung mit gleichmässigen Beschleunigung. Die Beschleunigung ist beim freien Fall die Erdbeschleunigung g.

Allgemein gilt bei einer *gleichmässig beschleunigten* Bewegung

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t \qquad s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \qquad s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{a} \tag{5}$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot (v_0 + v) \cdot t \qquad s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \qquad s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{a} \tag{6}$$

mit konstantem a, wenn der Körper zur Zeit $t = 0$ bei $s = 0$ in Ruhe war und somit $v = a \cdot t$ gilt, beziehungsweise wenn der Körper zur Zeit $t = 0$ bei $s = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \neq 0$ hatte und somit $v = v_0 + a \cdot t$ gilt.

Das Vorzeichen der Beschleunigung a bedeutet, in welcher Richtung sich die Geschwindigkeit ändert. Ist $a > 0$, so wird der Körper schneller. Ist hingegen $a < 0$, wo wird er langsamer. Der Fall $a = 0$ entspricht konstanter Geschwindigkeit und somit gleichförmiger Bewegung.

Beispiel:
Will man den *Bremsweg* eines Autos berechnen, so muss man wissen, in welchem Zustand die Reifen und die Strasse sind. Bei neuen Reifen auf trockener Strasse ist die Beschleunigung (im physikalischen Sinn) beim Bremsen etwa $-10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Bei einer Geschwindigkeit von $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ gibt das nach (6) einen Bremsweg von $s = \frac{v_0^2}{2 \cdot a} = \frac{-(400\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2})}{2 \cdot (-10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2})} = 20\,\text{m}$.

5 Zwei- und dreidimensionale Bewegung

5.1 Beschreibung durch Vektoren

Sobald sich eine Bewegung nicht eindimensional beschreiben lässt, stellt man den Ort als Vektor $\vec{r}$ dar. Mit $\vec{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ und $\vec{\Delta v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$ lassen sich die durchschnittliche Geschwindigkeit und Beschleunigung zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 als

$$\vec{v} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$$

beschreiben.

Es gibt also drei Arten Beschleunigung $\vec{a} \neq \vec{0}$. Gilt $|\vec{v_2}| > |\vec{v_1}|$, so nimmt die Geschwindigkeit zu. Gilt hingegen $|\vec{v_2}| < |\vec{v_1}|$, so nimmt sie ab. Im dritten Fall gilt $|\vec{v_2}| = |\vec{v_1}|$ und die Geschwindigkeit ändert folglich nur ihre Richtung. (Die Geschwindigkeit kann natürlich zugleich Betrag und Richtung ändern.) Diese drei Arten von Beschleunigung spürt man beispielsweise in einem Flugzeug. Im ersten Fall wird man in den Sitz gedrückt, im zweiten nach vorne geworfen und im dritten nach links oder rechts gezogen.

5.2 Gleichförmige Kreisbewegung

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung wählt man normalerweise den Kreismittelpunkt als Anfangspunkt der Ortsvektoren $\vec{r_i}$. Die Beschleunigung kann nicht 0 sein, auch wenn die Geschwindigkeit betragsmässig konstant ist, weil die Geschwindigkeitsvektoren tangential zur Kreisbahn liegen. Die Beschleunigungsvektoren zeigen deshalb immer zum Zentrum der Kreisbahn.

Gleichförmige Bewegung auf einer Kreisbahn ist periodisch. Deshalb sind Periode T und Frequenz f wichtige Grössen. Sie lassen sich durch die Anzahl Umläufe N und die dafür benötigte Zeit t definieren:

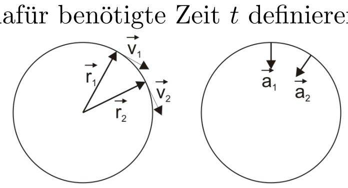
Frequenz: $f = \frac{N}{t}$
Einheit $\text{s}^{-1} = \text{Hz}$ (Hertz)

Periode: $T = \frac{t}{N}$
Einheit s

Diese beiden Grössen hängen durch die zwei Formeln

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f}$$

zusammen.



Beispiel:
Die Erde bewegt sich in guter Näherung auf einer kreisförmigen Bahn um die Sonne. Die Periode ist ein Jahr und die Frequenz eine Umdrehung pro Jahr.