Goniometrische Gleichungen

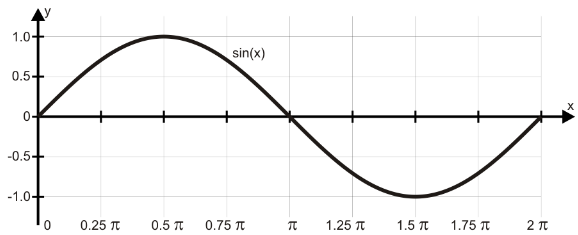
Rainer Hauser

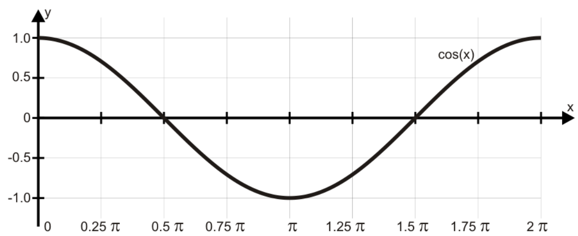
Juni 2011

1 Einleitung

1.1 Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens sind definiert für Winkel im Gradmass oder für Winkel im Bogenmass. Im Folgenden ist angenommen, die Winkel sind im Bogenmass, aber sämtliche Überlegungen lassen sich analog für Winkel im Gradmass durchführen.





Tangens und Cotangens lassen sich mit Sinus und Cosinus durch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cot(x)} \tag{1}$$

definieren. Mit $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ lässt sich auch der Cosinus durch den Sinus ausdrücken. Weiter gilt

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \tag{2}$$

als Spezialfall des Satzes von Pythagoras.

Die Funktionen Sinus und Cosinus sind periodisch und nehmen Werte aus dem Intervall $[-1, +1]$ an. Sinus hat Maxima bei $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, Minima bei $x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ und Nullstellen bei $x = n \cdot \pi$, und Cosinus hat Maxima bei $x = n \cdot 2\pi$, Minima bei $x = \pi + n \cdot 2\pi$ und Nullstellen bei $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ für $n \in \mathbb{Z}$.

1.2 Gerade und ungerade Funktionen

Definition:
Eine reelle Funktion f mit Definitionsbereich symmetrisch zu 0 heisst *gerade*, wenn für alle x im Definitionsbereich $f(-x) = f(x)$ gilt.

Beispiele:
Die Funktion $\cos(x)$, aber auch die Funktion $f(x) = x^2$ sind gerade Funktionen.

Definition:
Eine reelle Funktion f mit Definitionsbereich symmetrisch zu 0 heisst *ungerade*, wenn für alle x im Definitionsbereich $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Beispiele:
Die Funktion $\sin(x)$, aber auch die Funktion $f(x) = x$ sind ungerade Funktionen.

Gerade Funktionen sind spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse, und ungerade Funktionen sind punktsymmetrisch bezüglich dem Nullpunkt. Die Funktionen Sinus und Cosinus haben aber noch weitere Symmetrien. Sie sind spiegelsymmetrisch bezüglich jeder Geraden parallel zur y-Achse durch die Maxima und Minima, und jede Nullstelle ist Zentrum einer Punktsymmetrie.

2 Additionstheoreme

2.1 Summe und Differenz zweier Winkel

Es gilt

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y) \qquad \cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \cdot \tan(y)} \qquad \cot(x \pm y) = \frac{\cot(x) \cdot \cot(y) \mp 1}{\cot(x) \pm \cot(y)}$$

für beliebige reelle Zahlen x und y.

2.2 Doppelte und dreifache Winkel

Aus den Additionstheoremen für die Summe zweier Winkel folgt

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \qquad \sin(3x) = 3 \cdot \sin(x) - 4 \cdot \sin(x)^3$$

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \qquad \cos(3x) = 4 \cdot \cos(x)^3 - 3 \cdot \cos(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \cdot \tan(x)}{1 - \tan(x)^2} \qquad \tan(3x) = \frac{3 \cdot \tan(x) - \tan(x)^3}{1 - 3 \cdot \tan(x)^2}$$

durch $y = x$ und $y = 2x$.

2.3 Halbe Winkel

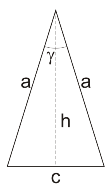
Daraus lässt sich weiter

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos(x)}{2} \qquad \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1 + \cos(x)}{2} \qquad \tan\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$$

ableiten.

2.4 Anwendung auf das gleichschenklige Dreieck

Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundseite c und den beiden gleich langen Schenkeln a. Wie lässt sich der Winkel γ aus den Seitenlängen a und c berechnen?



Mit der Höhe h auf c bekommt man zwei rechtwinklige Dreiecke mit $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{c}{2a}$. Aus (2) folgt $\cos(\gamma) = \cos\left(2\frac{\gamma}{2}\right) = 1 - 2 \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$ und weiter $\cos(\gamma) = 1 - \frac{c^2}{2a^2}$.

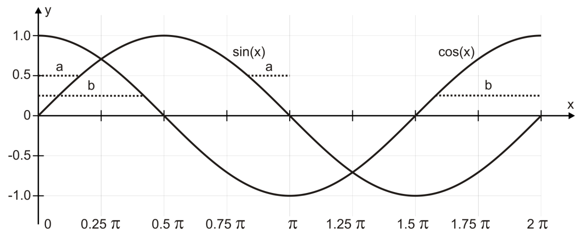
3 Gleichungen mit trigonometrischen Funktionen

3.1 Gleichungen der Form $F(term) = r$

Sei $F(x)$ eine trigonometrische Funktion, $term$ ein Term mit der einzigen Unbekannten x und r eine reelle Zahl, so lässt sich die Gleichung lösen, indem man erst $u = term$ substituiert, anschliessend die Gleichung $F(u) = r$ löst und zum Schluss die Substitution rückgängig macht, indem man u in der Gleichung $u = term$ durch die gefundenen Lösungen für u ersetzt.

Beispiel:
Bei der Gleichung $\cos(2x - 1) = 1$ führt die Substitution $u = 2x - 1$ zur Gleichung $\cos(u) = 1$ mit den Lösungen $u = n \cdot 2\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$. Aus $u = n \cdot 2\pi = 2x - 1$ bekommt man die Lösungen $x = n \cdot \pi + \frac{1}{2}$. Das sind alle Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

Die Gleichung $F(u) = r$ hat für Sinus und Cosinus im Intervall $[0, 2\pi[$ zwei Lösungen, falls $r \in]-1, +1[$ ist, eine Lösung, falls $r \in \{-1, +1\}$ ist, und keine Lösung sonst. Mit den Spiegelsymmetrien dieser beiden Funktionen findet man die zweite Lösung, falls man die erste kennt, wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt. Die übrigen Lösungen folgen aus der 2π-Periodizität dieser Funktionen.



Die Gleichung $F(u) = r$ hat für Tangens und Cotangens im Intervall $[0, \pi[$ genau eine Lösung, woraus durch Addition von $n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ alle Lösungen für u folgen. Weil Taschenrechner meist keine Taste für den Cotangens haben, löst man die Gleichung $\cot(u) = r$, indem man sie mit (1) in $\tan(u) = \frac{1}{r}$ umformt, falls $r \neq 0$ ist. Für $r = 0$ findet man die Lösung mit $\cot(u) = 0 \Leftrightarrow \cos(u) = 0$.

Beispiel:
Die Gleichung $\cot(5x + 2) = \sqrt{3}$ lässt sich zu $\tan(5x + 2) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ umformen. Mit Substitution $u = 5x + 2$ folgt die Gleichung $\tan(u) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ mit den Lösungen $u = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$ für $n \in \mathbb{Z}$. Macht man die Substitution rückgängig, bekommt man die Gleichung $\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi = 5x + 2$, welche die Lösungen $x = \frac{\pi}{30} - \frac{2}{5} + n \cdot \frac{\pi}{5}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ hat.

3.2 Gleichungen der Form $a \cdot \sin(term) = b \cdot \cos(term)$

Gleichungen von der Form $a \cdot \sin(term) = b \cdot \cos(term)$ für reelle Zahlen a und b sowie jeweils den gleichen Term $term$ als Argument im Sinus und im Cosinus lassen sich wegen (1) in $\tan(term) = r$ mit $r = \frac{b}{a}$ umformen. Sie lassen sich somit in die Form $F(term) = r$ bringen und wie oben gezeigt lösen.

Beispiel:
Dividiert man die beiden Seiten der Gleichung $\sin(x) = \sqrt{3} \cdot \cos(x)$ durch $\cos x$, bekommt man die Gleichung $\tan(x) = \sqrt{3}$ mit der Lösung $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

3.3 Gleichungen mit $\sin(term)^2$ oder $\cos(term)^2$

Kommt in einer Gleichung $\sin(term)^2$ oder $\cos(term)^2$ vor, so kann der Satz von Pythagoras in der Form (2) helfen, die Gleichung zu vereinfachen. Man kann $\sin(term)^2$ durch $1 - \cos(term)^2$ beziehungsweise $\cos(term)^2$ durch $1 - \sin(term)^2$ ersetzen.

Beispiel:
Die Gleichung $3 \cdot \cos(x) = 2 \cdot \sin(x)^2$ kann man nicht einfach in eine Gleichung der Form $\tan(x) = r$ umwandeln. Ersetzt man aber die rechte Seite mit dem Satz von Pythagoras, bekommt man die Gleichung $3 \cdot \cos(x) = 2 - 2 \cdot \cos(x)^2$, die durch die Substitution $u = \cos(x)$ zur quadratischen Gleichung $2u^2 + 3u - 2 = 0$ mit den Lösungen $u_1 = -2$ und $u_2 = 0.5$ wird. Die erste Lösung führt zu $-2 = \cos(x)$, was keine Lösung hat, weil der Cosinus zwischen -1 und $+1$ pendelt. Die zweite Lösung führt zu $0.5 = \cos(x)$ mit den Lösungen $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ und $x = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$.

3.4 Gleichungen mit $F(term)$ und $F(n \cdot term)$ für $n \in \mathbb{N}$

In den bisherig besprochenen Gleichungen waren die Argumente in den vorkommenden trigonometrischen Funktionen jeweils gleich. Sind sie das nicht, können möglicherweise die Additionstheoreme weiterhelfen. Mit $F(2x) = F(x + x)$ und $F(n \cdot x) = F((n - 1) \cdot x + x)$ kann man $F(n \cdot x)$ schrittweise für $n = 3$, $n = 4$ und so weiter für alle $n \in \mathbb{N}$ bestimmen.

Beispiel:
Die Gleichung $\cos(x) = \cos(3x)$ lässt sich mit den oben aufgelisteten Additionstheoremen in die Gleichung $\cos(x) = 4 \cdot \cos(x)^3 - 3 \cdot \cos(x)$ und weiter mit der binomischen Formel $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ in $\cos(x)^3 - \cos(x) = \cos(x) \cdot (\cos(x)^2 - 1) = \cos(x) \cdot (\cos(x) + 1) \cdot (\cos(x) - 1) = 0$ umformen, woraus die drei Lösungen $\cos(x) = 0$, $\cos(x) = -1$ und $\cos(x) = 1$ folgen. Die Werte $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$ sind also die Lösungen der Gleichung $\cos(x) = \cos(3x)$.

3.5 Allgemeine Bemerkungen zum Lösen von Gleichungen

Die obige Aufstellung von goniometrischen Gleichungen ist nicht vollständig, gibt aber Hinweise, wie man einfachere Fälle von goniometrischen Gleichungen behandeln kann. Zwei Bemerkungen sind nicht nur für goniometrische, sondern auch für andere Gleichungen nützlich:

1. Komplizierte Gleichungen lassen sich manchmal durch Substitution in einfachere Gleichungen umwandeln und auf diese Weise lösen.
   Beispiel: Die Gleichung $(x^2 + 4x + 7)^2 = 9$ lässt sich durch die Substitution $u = x^2 + 4x + 7$ in die einfachere Form $u^2 = 9$ bringen und kann somit durch Lösen der beiden quadratischen Gleichungen $u^2 - 9 = 0$ und $u_i = x^2 + 4x + 7$ mit den gefundenen Lösungen u_i für u gelöst werden.
2. Gleichungen, die nicht offensichtlich linear sind, bringt man am besten in die Form, dass eine Seite der Gleichung 0 ist, und versucht die andere Seite zu faktorisieren.
   Beispiele: Versucht man $u^2 = 9$ direkt zu lösen, übersieht man eventuell die Lösung $u_1 = -3$. Bringt man die Gleichung jedoch in die Form $u^2 - 9 = 0$, kann man sie entweder mit der Lösungsformel oder mit $(u + 3)(u - 3) = 0$ lösen und findet so die beiden Lösungen $u_1 = -3$ und $u_2 = 3$. Auch die goniometrische Gleichung $2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \cos(x)$ sollte man nicht einfach durch $\cos(x)$ dividieren, sondern in die Form $(2 \cdot \sin(x) - 1) \cdot \cos(x) = 0$ bringen, weil man sonst möglicherweise die Lösungen für $\cos(x) = 0$ übersieht und nur die Lösungen für $\sin(x) = 0.5$ findet.